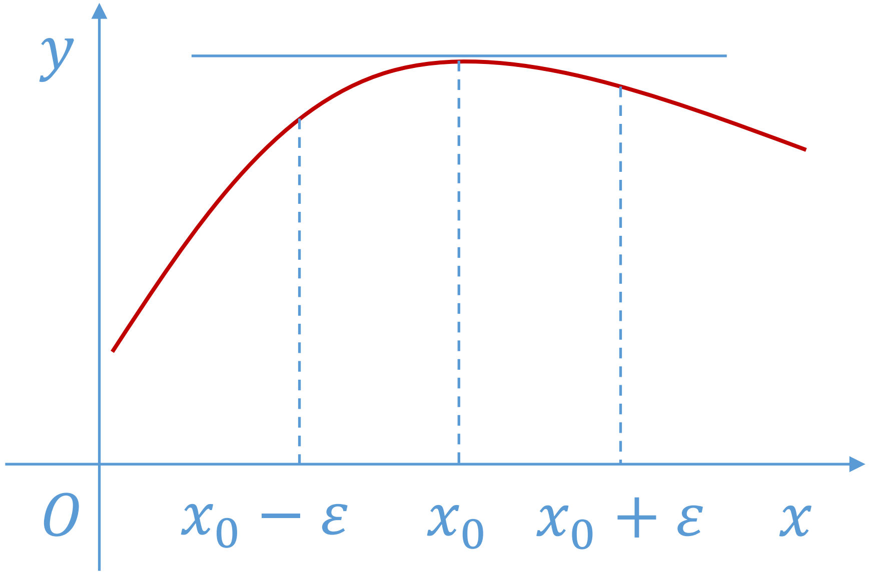
第四章 一元函数微分学的应用

4.1 微分中值定理

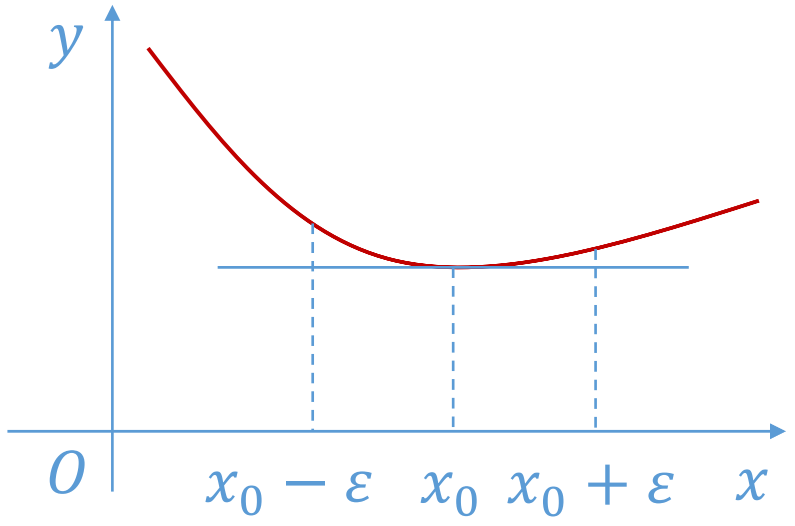
- **费马引理**

- 设 $y = f(x)$ 是如下图所示的一个函数，它在点 x_0 的一个邻域 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 内有连续的导数. 我们来观察下它的函数图像在 $(x_0, f(x_0))$ 附近有什么特点?

- 从图像上看出，在点 x_0 附近 $f(x) \leqslant f(x_0)$，且 $f(x)$ 在 x_0 处的切线是水平的.



- 如果 $y=f(x)$ 是下图所示情形又当如何呢?
- 从图像上看出, 在点 x_0 附近 $f(x)\geqslant f(x_0)$, 且 $f(x)$ 在 x_0 处的切线是水平的.



- 费马引理 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 的某个邻域内 且 $f(x) \leqslant$ (或 $\geqslant$) $f(x_0)$，则 $f'(x_0) = 0$.
- 证明 我们只证明 $f(x) \leqslant f(x_0)$ 的情形，另一情形类似.
- 当 $x > x_0$ 时，$f(x) \leqslant f(x_0)$，于是 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$. 由极限的保号性可知

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0.$$

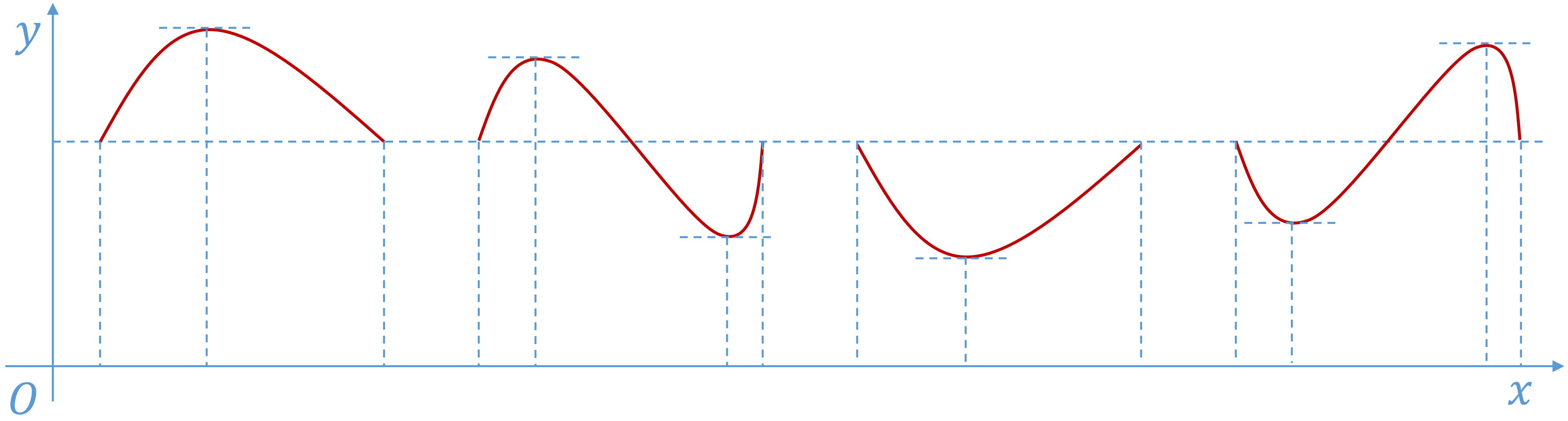
- 当 $x < x_0$ 时，$f(x) \leqslant f(x_0)$，于是 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. 由极限的保号性可知

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

- 由此可知 $f'(x_0) = 0$.

- **罗尔中值定理**

- 观察下方的函数图像. 设 $y = f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的可导函数, 且 $f(a) = f(b)$. 可以发现, 在这个闭区间上总有一点具有水平的切线.

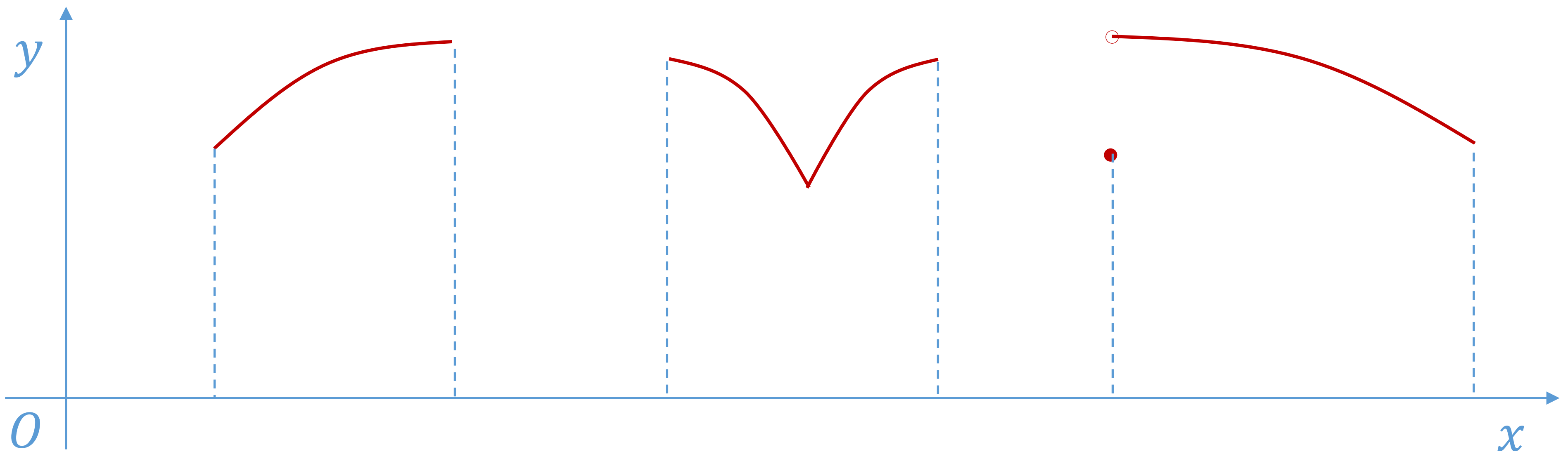


- 罗尔中值定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.
- 从几何角度来说，若连续曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上除了端点外，其余各点处均有切线，那么在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，至少有一点的切线与直线 AB 平行.
- 只需要取 x 轴和 AB 平行就可以发现二者是等价的.
- 从代数角度来说，如果函数 $f(x)$ 满足罗尔中值定理的条件，则导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点，或方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

- 证明 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 由最值定理, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取得最大值 M 和最小值 m, 从而有 $m \leqslant f(x) \leqslant M, x \in [a,b]$.
- 如果 $M=m$, 则 $f(x)=M, f'(x)=0$, 从而任取 $\xi \in (a,b)$ 即可.
- 如果 $M \neq m$, 则 $f(a) \neq M$ 或 $f(a) \neq m$. 不妨设 $f(a) \neq M$, 则在 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi)=M$.
- 由费马定理可知 $f'(\xi)=0$.

- 下列例子表明, 罗尔中值定理的三个条件缺一不可:

$$f(x) = x, \qquad f(x) = |x|, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$



- 例 证明方程 $x^5 + ax - 1 = 0\ (a > 0)$ 只有一个正根.
- 证明 先使用零点定理证明存在性.
- 设 $f(x) = x^5 + ax - 1$, 则 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = a > 0$.
- 显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 由零点定理知 $\exists \xi \in (0, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$.
- 再利用反证法证明唯一性.
- 如果 $f(x) = 0$ 存在两个正根 $x_1 < x_2$, 则由罗尔中值定理可知 $\exists \eta \in (x_1, x_2)$ 使得 $f'(\eta) = 0$.
- 但是 $f'(x) = 5x^4 + a > 0$, 矛盾! 因此方程 $f(x) = 0$ 只有唯一正根.

- **例** 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=g(b)=0$.
- 证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.
- **分析** 很明显, 要证明的等式左侧是 $F(x)=f(x)g(x)$ 的导数, 因此我们对它使用罗尔中值定理.
- **证明** 令 $F(x)=f(x)g(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$$F(a)=f(a)g(a)=0, \qquad F(b)=f(b)g(b)=0.$$

- 由罗尔中值定理, $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

- **例** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$.
- 证明函数 $2f(x)+xf'(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一零点.
- **分析** 我们需要构造一个 $F(x)$ 使得 $F'(x)=0$ 等价于 $2f(x)+xf'(x)=0$.
- 我们想到 $(x^2)'=2x$, 因此 $F(x)=x^2f(x)$.
- **证明** 令 $F(x)=x^2f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$$F(0)=0, \qquad F(1)=f(1)=0.$$

- 由罗尔中值定理, $\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0.$$

- 由于 $\xi\neq0$, 因此 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

- 这种类型问题的难点都在于构造函数 $F(x)$.
- 常见的情形有:
- $kf(x)+xf'(x), F(x)=x^k f(x)$, 其中 k 是任意实数.
- $kf(x)+f'(x), F(x)=e^{kx} f(x)$, 其中 k 是任意实数.

- **拉格朗日中值定理**
- 回忆下罗尔中值定理的几何解释: 若连续曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上除了端点外, 其余各点处均有切线, 那么在 $\overset{\frown}{AB}$ 上, 至少有一点的切线与直线 AB 平行.
- 这是因为我们可以取 x 轴和 AB 平行, 这样二者便是等价的.
- 如果 x 轴和 AB 不平行, 那么便可得到罗尔中值定理的一个变化, 即:
- 拉格朗日中值定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- 这里 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 便是函数 $f(x)$ 的图像在 $x=a,b$ 两点连线的斜率.
- 证明 设

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

- 则 $g(b)-g(a)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0.$
- 由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 因此由罗尔中值定理, $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- 注 当 $a > b$ 时该定理也成立, 此时 $\xi \in (b, a)$.
- 拉格朗日中值定理是微分学中重要定理之一, 它可以改写为如下形式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \qquad \xi \text{ 介于 } a, b \text{ 之间}.$$

- 如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导, $x_0 \in (a, b)$, 则对于 $x \in (a, b)$, $\exists \xi$ 位于 x_0 和 x 之间使得 $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$.

- 例 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$x_1,x_2 \in (a,b)$ 且 $x_1 < x_2$，则 $\exists \xi$ 使得 (　　).

  (A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), a<\xi<b$;

  (B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1), x_1<\xi<b$;

  (C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), x_1<\xi<x_2$;

  (D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a), a<\xi<x_2$.

- 解 对照拉格朗日中值定理的条件可知选 C.

- 拉格朗日定理可以用来证明区间上导数为 0 的函数一定是常值函数.
- **推论** 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且导函数 $f'(x)\equiv 0$, 则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数.
- **证明** 设 $x_1, x_2 \in (a,b)$, 我们来证明 $f(x_1)=f(x_2)$.
- 不妨设 $x_1 < x_2$. 显然 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 于是 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0.$$

- 因此 $f(x_1)=f(x_2)$. 由 x_1, x_2 的任意性可知函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数.

- **推论** 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导, 且导函数 $f'(x)\equiv 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.
- **证明** $\exists C$ 使得 $f(x)\equiv C, x\in(a,b)$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 因此

$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=C, \qquad f(b)=\lim_{x\to b^-} f(x)=C.$$

- 从而$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.
- 对于半开半闭以及无穷区间上也可类似证明.

- 结论 (1) 如果函数 $f(x)$ 在一段区间上连续，区间内可导，且导函数恒为零，则函数 $f(x)$ 在该区间上为常数.
- (2) 如果函数 $F(x), G(x)$ 在一段区间上连续，区间内可导，且导函数恒等，则在该区间上 $F(x)-G(x)$ 是常数.
- 由此可知，一个函数的导函数在相差一个常数的意义下唯一确定原函数.
- 例 证明 $x \geqslant 1$ 时，$2\arctan x - \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

- **证明** 令 $f(x)=2\arctan x-\arccos\frac{2x}{1+x^2}$, 则 $x>1$ 时 $\frac{2x}{1+x^2}\in(-1,1)$, 从而 $f(x)$ 可导且

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=0.$$

- 由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 因此 $f(x)\equiv f(1)=2\cdot\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{2}$.

- **例** 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导. 证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$.
- **分析** 我们需要构造 $F(x)$，使得 $f(x) + xf'(x)$ 与 $F'(x)$ 关联.
- **证明** 令 $F(x) = xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导.
- 由拉格朗日中值定理，$\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}.$$

- 由于 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$，因此 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = \frac{bf(b)-af(a)}{b-a}$.

- 例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=e^{1-\xi}$.
- 分析 我们需要构造 $F(x)$, 使得 $e^x[f(x)+f'(x)]$ 与 $F'(x)$ 关联.
- 证明 令 $F(x)=e^x f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导.
- 由拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=\frac{e-0}{1-0}=e.$$

- 由于 $F'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$, 因此 $e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=e$.

- 例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$.
- 证明 $\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right), \eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.
- 分析 我们需要构造一个辅助函数 $F(x)$, 使得 $f'(x)-x^2$ 与 $F'(x)$ 关联.
- 证明 令 $F(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导.

- 我们有 $F(0)=F(1)=0$. 分别对区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 应用拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得

$$F'(\xi)=\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=2F\left(\frac{1}{2}\right),\qquad F'(\eta)=\frac{F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=-2F\left(\frac{1}{2}\right),$$

- 即 $F'(\xi)+F'(\eta)=0$. 由于 $F'(x)=f'(x)-x^2$, 因此

$$f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0,\qquad f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

- 例 设有界函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, 则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

- **解** 由拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in(x,2x)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$.
- 当 $x\to+\infty$ 时, $\xi\to+\infty$. 由于 $f(x)$ 有界, 因此 $\frac{f(2x)-f(x)}{x}\to 0$, 从而 $f'(\xi)\to 0$, 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 选 B.
- 对于A, 我们可以构造一个振荡趋于 0 的函数, 例如

$$f(x)=\frac{\sin x^2}{x},f'(x)=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2},f'\left(\sqrt{2k\pi}\right)=2.$$

- 对于CD, 我们可取 $f(x)=x,x\in(0,1)$.

- **柯西中值定理**
- 现在我们对拉格朗日中值定理再做推广，从一个函数的情形推广至两个函数的情形.
- 回忆下拉格朗日中值定理的几何解释：若连续曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上除了端点外，其余各点处均有切线，那么在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，至少有一点的切线与直线 AB 平行.
- 在拉格朗日中值定理中，我们用直角坐标来表示曲线方程. 如果我们用参数方程会发生什么呢？

- 设曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t), \end{cases}$ $t \in [a, b]$. 曲线的两个端点为 $A\big(g(a), f(a)\big), B\big(g(b), f(b)\big)$. 于是 AB 的斜率为

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

- 由于 $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$, 因此由拉格朗日中值定理的几何解释可知, 存在 $C\big(g(\xi), f(\xi)\big), \xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

- 柯西中值定理 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

- 证明 设 $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$, 则

$$F(b) - F(a) = [f(b) - f(a)] - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(b) - g(a)] = 0.$$

- 由罗尔中值定理, $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

- **注** 若没有条件 $g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$, 我们可得到 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$.
- **注** 若当 $g(x) = x$ 时, 柯西中值定理变为: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 即拉格朗日中值定理.
- **例** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(0 < a < b)$ 上连续, 在 (a,b) 内可导. 证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$.

- 分析 包含 ξ 的项为 $\xi f'(\xi)=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}$, 我们对 $f(x)$ 和 $\ln x$ 应用柯西中值定理.

- 证明 令 $g(x)=\ln x$, 则 $g'(x)=\frac{1}{x}$. 由柯西中值定理, $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

- 即 $f(b)-f(a)=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}[g(b)-g(a)]=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

- 例 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)\neq 0$. 证明 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.
- 分析 包含 ξ 的项为 $f'(\xi)$, 我们对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理.
- 包含 η 的项为 $f'(\eta)e^{-\eta}=\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$, 我们对 $f(x)$ 和 e^x 应用柯西中值定理.
- 证明 令 $g(x)=e^x$, 则 $g'(x)=e^x$. 由柯西中值定理, $\exists\eta\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}.$$

- 由拉格朗日中值定理, $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- 因此

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{e^b - e^a}{[f(b) - f(a)]e^\eta} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}.$$

- 一般地，对于要证明的命题为 $\exists\xi$ 满足某个方程的题目：
- 如果题设中出现了函数连续的条件，则一般用零点定理.
- 如果题设中出现了函数连续和可导的条件，则一般用本节的三种中值定理.
- 如果出现了高阶导数，则一般用后面的泰勒中值定理.
- 我们将包含 ξ 的所有项放在一起，并寻找一个 $F(x)$ 使得其导数和这些项只相差一个倍数. 而这个倍数则是由另一个函数 $G(x)$ 的导数所提供.
- 例如 $2f(\xi)+xf'(\xi)=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$, $F(x)=x^2f(x), G(x)=\frac{1}{2}x^2$.
- 然后应用柯西中值定理.

- 如果要证明的命题为 $\exists\xi,\eta$ 满足某个方程的题目.
- 寻找 $F_1(x), G_1(x)$ 使得 $\frac{F_1'(\xi)}{G_1'(\xi)}$ 等于包含 ξ 的所有项,
- 寻找 $F_2(x), G_2(x)$ 使得 $\frac{F_2'(\xi)}{G_2'(\xi)}$ 等于包含 η 的所有项,
- 然后用两次柯西中值定理.

4.2 洛必达法则

- 回忆两个无穷小的和、差和乘积都是无穷大, 但两个无穷小的商则各种情形都有可能. 此即所谓 $\frac{0}{0}$ 型不定式.
- 在部分情形下, 我们可以用等价无穷小替换很快得到结果.
- 然而对于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

- 这个极限, 我们却无法处理. 这个问题可以通过洛必达法则解决.

- $\frac{0}{0}$ **型不定式**
- 洛必达法则I 设函数 $f(x), g(x)$ 满足
- (1) 在点 x_0 的某一去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;
- (2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;
- (3) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或无穷大), 则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 现在我们利用洛必达法则:
- (1) $\sin x - x, x^3$ 处处可导, 且 $(x^3)' = 3x^2$ 在 0 的去心邻域上非零;
- (2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x - x) = \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$;
- (3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\dfrac{1}{6}$.
- 因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = -\frac{1}{6}.$$

- 其实我们还可以反复使用洛必达法则得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

- 其中每一次应用，我们都需要验证洛必达法则的条件.

- **证明** 由于 $f(x_0)$ 和 $g(x_0)$ 的值不影响这些极限，因此可不妨设 $f(x_0)=g(x_0)=0$，那么 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 内连续.
- 设 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$. 由拉格朗日中值定理，$\exists\xi$ 在 x_0 和 x 之间使得

$$g'(\xi)=\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

- 由于 $g'(\xi)\neq 0$，因此 $g(x)\neq g(x_0)=0$.

- 由柯西中值定理, $\exists\xi$ 在 x_0 和 x 之间使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- 当 $x \to x_0$ 时, $\xi \to 0$.
- 于是两边求极限得到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 是无穷大, 那么在 x_0 的某去心邻域内 $f'(x)\neq 0$. 若不然, 则存在一串趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 使得 $f'(x_n)=0$, 而这意味着 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0$, 与假设矛盾.
- 于是由我们已经证明的结论可知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0,$$

- 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

- 推论 设函数 $f(x), g(x)$ 满足
- (1) 当 $|x|$ 充分大时可导, 且 $g'(x) \neq 0$;
- (2) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$;
- (3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或无穷大), 则有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 证明 令 $F(x)=f\left(\frac{1}{x}\right), G(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}$.
- 由洛必达法则,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 注 上述两个定理对于单侧极限也成立.

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

- 解 该极限是 $\frac{0}{0}$ 型不定式，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

- 例 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{arccot} n}$.
- 分析 求数列极限的不定式时，我们不能直接使用洛必达法则.
- 但是我们可以将其转化为 $x\to+\infty$ 时对应的函数极限问题，再利用函数极限的不定式方法来处理.
- 解 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 都是初等函数，且当 $x>0$ 时均可导. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln 1=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0,$$

- 所以该极限是 $\frac{0}{0}$ 型不定式.

- 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}=1.$$

- 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{arccot}n}=1.$$

- **例** 设函数 $f(x) = \arctan x$. 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}$.

- **解** 由于 $f'(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\arctan x}{x}$, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\arctan x} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \arctan x}{x^2\cdot\arctan x}$$

$$\underline{\underline{\text{等价无穷小代换}}}\ \lim_{x\to 0}\frac{x - \arctan x}{x^3}$$

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\ \lim_{x\to 0}\frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}.$$

- 例 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)f'(0)\neq 0$. 若 $h\to 0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h)$，求 a,b.
- 解 由于

$$0=\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0),$$

- 因此 $a+b=1$. 由洛必达法则

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0),$$

- 所以 $a+2b=0$. 联立求得 $a=2,b=-1$.

- $\frac{\infty}{\infty}$ **型不定式**
- 洛必达法则II 设函数 $f(x), g(x)$ 满足
- (1) 在点 x_0 的某一去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$;
- (2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$;
- (3) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或无穷大)，则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- 注意此时不能对 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}, G(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ 应用洛必达法则l直接得到，因为我们不能直接把 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}\cdot\dfrac{f^2(x)}{g^2(x)}$ 右侧拆开.
- 证明 设 $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. 我们只证明 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，另一边是类似的.
- $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时 $A-\varepsilon<\dfrac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon$.
- 由柯西中值定理，$\exists\xi\in(x,x_0+\delta)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(x_0+\delta)}{g(x)-g(x_0+\delta)}.$$

- 于是 $A-\varepsilon<\dfrac{f(x)-f(x_0+\delta)}{g(x)}\cdot\dfrac{g(x)}{g(x)-g(x_0+\delta)}<A+\varepsilon.$
- 因为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$, 所以

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0+\delta)}{g(x)}=0,\qquad \lim_{x\to x_0^+}\frac{g(x)}{g(x)-g(x_0+\delta)}=1.$$

- 故 $A-\varepsilon\le\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}\le A+\varepsilon.$ 由 ε 任意性可知

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

- 当 $x \to \infty$ 以及单侧极限情形时，我们有类似结论.

- 例 求 $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \dfrac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\tan x}$.

- 解 该极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\tan x} \underline{\underline{\text{洛必达法则}}} \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{\underline{t = x - \frac{\pi}{2}}} \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin^2 t}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^2}{t} = 0.$$

- **例** 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$.

- **解** 该极限是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}\ \underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{3\cot 3x}{2\cot 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\tan 2x}{2\tan 3x}$$

$$\underline{\underline{\text{等价无穷小代换}}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{6x}{6x}=1.$$

- **例** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$, 其中 $\lambda>0$.
- **解** 该极限是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\cdots\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$$

- 也可以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{\lambda x}{n}}}\right)^n\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\lambda}{n}e^{\frac{\lambda x}{n}}}\right)^n=0.$$

- **例** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^m}{x^n}$，其中 $m,n>0$.
- **解** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^m}{x^n} \xlongequal{t=\ln x} \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^m}{e^{nt}}=0.$
- **结论** $\forall m,n,\lambda>0$，当 $x\to+\infty$ 时，作为无穷大而言，$e^{\lambda x}$ 远远大于 x^n，x^n 远远大于 $(\ln x)^m$，记作

$$e^{\lambda x}\gg x^n\gg(\ln x)^m\quad(x\to+\infty).$$

- 使用洛必达法则的注意事项
- (1) 洛必达法则只能用于 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，每次使用前都需要先确定是否是这两种不定式.
- 一旦不再是这两种不定式，便不再能使用洛必达法则，而是直接得出结果.
- 例如 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{\sin x+x\cos x}\cancel{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{2}{2}=1.$
- 实际上 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{\sin x+x\cos x}=\infty.$

- (2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，我们并不能得到 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在. 例如

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\qquad g(x)=x,$$

- 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

- 但是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}=-\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 却不存在.

- (3) 每一次使用洛必达法则都要及时化简，包括将分子分母的因子用等价无穷小替换，极限非零的因子用其极限替代.

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\left(e^{x^2}-1\right)}$.

- 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\left(e^{x^2}-1\right)}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\cdot x^2}$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

- 如果只用洛必达法则，分母的导数会十分冗长.

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{\tan x-x}$.

- 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{\tan x-x}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{\tan x-x}$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan^2 x}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

- **例** 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(0)=g'(0)=0, g''(0)=3$. 求 $f'(0)$.

- **解** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{2}=\frac{3}{2}.$$

- 例* 设 $f(x)$ 在 0 的某个邻域 I 内任意阶可导且 $f(0)=0$. 证明函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0\end{cases}$$ 在 I 内任意阶可导且 $g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$.

- 证明 当 $x\neq 0$ 时,

$$g^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x)\cdot(-1)^{n-k}(n-k)!\,x^{-n+k-1}$$

$$=\frac{1}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}x^k f^{(k)}(x).$$

- 由洛必达法则，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) \\
&= \frac{1}{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^{n-k}n!\,x^k f^{(k+1)}(x)}{k!}-\frac{(-1)^{n-k+1}n!\,x^{k-1}f^{(k)}(x)}{(k-1)!}\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}x^k f^{(k)}(x)\right]' \\
&= \frac{1}{n+1}\lim_{x\to 0} f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0).
\end{aligned}
$$

- 我们归纳证明 $g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$.
- 设 $g^{(n-1)}(0)=\frac{1}{n}f^{(n)}(0)$, 则函数 $g^{(n)}(x)$ 处处有定义且连续.
- 由洛必达法则

$$g^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g^{(n)}(x)}{1}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0).$$

- 因此 $g^{(n)}(x)$ 处处有定义且连续.

- **其它类型不定式**
- $0\cdot\infty$ 和 $\infty\pm\infty$ 不定式，我们将其变形转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式.
- 例 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.
- 解 这是 $\infty\cdot 0$ 型不定式，

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\left(1+x^2\right)^{-1}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x.$
- 解 这是 $0\cdot\infty$ 型不定式,

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$

- 同理 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\lambda \ln x = 0, \lambda > 0.$
- 若将其改写为 $\dfrac{x^2}{1/\ln x}$ 并使用洛必达法则，则会发现无法求得答案.
- 因此选择合适的 $\dfrac{f}{g}$ 形式非常重要.

- 对于 $\infty \pm \infty$ 型不定式，一般考虑将其改写为 $\frac{1}{0} \pm \frac{1}{0}$ 型并通分为 $\frac{0}{0}$ 型.
- 例 求 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.
- 解 这是 $\infty - \infty$ 型不定式，

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

- 例 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.
- 解 这是 $\infty-\infty$ 型不定式,

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}\,\underline{\underline{洛必达法则}}\,\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

$$\underline{\underline{洛必达法则}}\,\lim_{x\to1}\frac{x^{-1}}{x^{-1}+x^{-2}}=\frac{1}{2}.$$

- 例 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.
- 解 这是 $\infty-\infty$ 型不定式, 令 $t=\frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}$$

注意 $\sqrt[6]{t^6}=|t|$

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{6}(1+t)^{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{6}(1-t)^{-\frac{5}{6}}}{1}=\frac{1}{3}.$$

- 对于幂指型不定式，一般考虑将其改写为以 e 为底的极限形式，即

$$\lim u^v = \lim \exp(v \ln u) = \exp[\lim(v \ln u)],$$

- 这里为了书写方便和美观我们记 $\exp x = e^x$.
- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.
- 解 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln x\right)$ 　 $0\cdot\infty$型不定式

$$\xlongequal{\text{等价无穷小代换}} \exp\left(\lim_{x\to 0^+} x \ln x\right) = \exp 0 = 1.$$

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.
- 解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}\right)$ $\dfrac{0}{0}$型不定式

$$\underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{1}\right) = \exp 0 = 1.$$

- 也可以用 1^∞ 型不定式处理技巧

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}\right)$$

$$\underline{\underline{\text{等价无穷小代换}}}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}\right) = \exp 0 = 1.$$

- 例 求 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\tan x)^{\cos x}$.

- 解 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\tan x)^{\cos x} = \exp\left(\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\ln\tan x)\cos x\right)$

$$\underline{\underline{t=\frac{\pi}{2}-x}}\exp\left(\lim_{t\to 0^+}(\ln\cot t)\sin t\right) = \exp\left(\lim_{t\to 0^+}(\ln\cot t)t\right) \quad \infty\cdot 0\text{型不定式}$$

$$= \exp\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\cot t}{t^{-1}}\right) \underline{\underline{\text{洛必达法则}}} \exp\left(\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\tan t}{-t^{-2}}\right)$$

$$\underline{\underline{\text{等价无穷小代换}}}\exp\left(\lim_{t\to 0} t\right) = \exp 0 = 1.$$

- 例 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$处的连续性.

- 解 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]\right)$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)\underline{\underline{洛必达法则}}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2(x+1)}\right]\right)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)=f(0^-),$$

- 从而 f 在 $x=0$ 处连续.
- **例** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.
- **解** 考虑它对应的函数极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right) \quad \frac{\infty}{\infty}\text{型不定式}$$

$$\underset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right) = \exp 0 = 1,$$

- 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

4.3 泰勒中值定理

- 在利用函数的微分作近似计算的时候，我们有一阶近似公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

- 换言之，我们用一个至多一次的多项式 $P_1(x)$ 来作为函数 $f(x)$ 的一个近似，使得它 $P_1(x)$ 和 $f(x)$ 在 x_0 的函数值与导数值相等.
- 那么很自然地，我们能否用更高次数的多项式来作为函数 $f(x)$ 的一个近似，使得误差更小呢?

- **泰勒中值定理**
- 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有 $n+1$ 阶导数.
- 设 $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ 是一个次数不超过 n 的多项式.
- 为了使得 $P_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 x_0 邻域内尽可能接近, 我们要求二者在 x_0 处的函数值、导数值、二阶导数值、直至 n 阶导数值都相等, 即

$$P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0),\qquad 0\leqslant k\leqslant n.$$

- 根据幂函数的高阶导数公式可知 $P_n^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$, 因此 $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$,

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

- 该多项式被称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒多项式.

- **泰勒中值定理** 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数, $x_0 \in (a,b)$.
- 对于 $x \in (a,b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

- 其中 ξ 位于 x_0, x 之间.
- 当 $x = x_0$ 时我们也认为上式成立.

- 简单来说，泰勒公式为 $f(x)=$ 泰勒多项式 + 余项，其中

$$\text{泰勒多项式}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

$$\text{余项}\,R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$=\underbrace{\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{拉格朗日余项}\ (0<\theta<1)}=\underbrace{o\big((x-x_0)^n\big)}_{\text{皮亚诺余项}}.$$

- 带原始余项形式的泰勒公式常用于证明与高阶导数有关的中值等式和中值不等式的命题.
- 带皮亚诺余项的泰勒公式只需要 $f(x)$ 有 n 阶导数即可，这种余项形式常用于极限计算中，而且常常 $x_0=0$.
- 容易看出，如果 $f(x)$ 和一个至多 n 次多项式相差 $o\left((x-x_0)^n\right)$，那么这个多项式一定是泰勒多项式.

- 注 当 $x_0 = 0$ 时

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

- 其中 η 位于 $0, x$ 之间, 它被称为麦克劳林公式.
- 此时余项为 $(0 < \theta < 1)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = o(x^n).$$

- **证明** 令

$$H(t)=f(x)-\left[f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right],$$

- 则 $H(t)$ 连续. 因为

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right]=\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1},$$

- 所以 $H'(t)=\frac{dH}{dt}=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$

- 对 $H(t)$ 和 $(x-t)^{n+1}$ 使用柯西中值定理, 存在 ξ 介于 x_0 和 x 之间, 使得

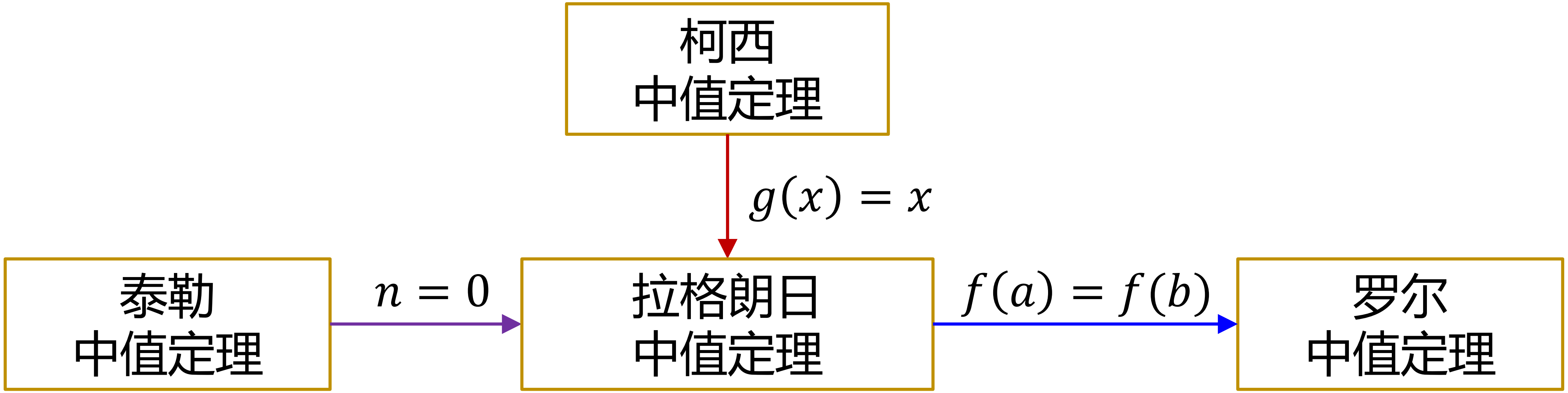
$$\frac{H(x_0)-H(x)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{H'(\xi)}{-(n+1)(x-\eta)^n}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

- 由 $H(x_0)=f(x)-P_n(x)$ 和 $H(x)=0$ 可知命题成立.

- **注** 当 $n=0$ 时，泰勒公式就是拉格朗日中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$

- 所以泰勒公式时拉格朗日中值公式的推广.



- 例 $y=3^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数为多少?
- 解 因为

$$y=e^{x\ln 3},\qquad y^{(n)}=(\ln 3)^n e^{x\ln 3}=(\ln 3)^n 3^x,$$

- 所以 $y^{(n)}(0)=(\ln 3)^n$, $y=3^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数为

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(\ln 3)^n}{n!}.$$

- 由于麦克劳林公式和泰勒公式只在自变量上差一个平移, 因此我们来集中讨论下常用函数的麦克劳林公式.

- **常见函数的 n 阶麦克劳林公式**
- 例 求 $f(x)=e^x$ 带拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.
- 解 因为

$$f^{(n)}(x)=e^x,\qquad f^{(n)}(0)=1,\qquad f^{(n+1)}(\theta)=e^{\theta x},$$

- 所以 $f(x)=e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

- 其中 $0<\theta<1$.

- 例 求 $f(x)=\cos x$ 拉格朗日余项的的 $2k+1$ 阶麦克劳林公式.

- 解 因为 $f(x)=\cos x$， $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, 所以

$$f^{(2k)}(0)=\cos(k\pi)=(-1)^k,\qquad f^{(2k+1)}(0)=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$f^{(2k+2)}(\theta x)=\cos[\theta x+(k+1)\pi]=(-1)^{k+1}\cos\theta x,$$

- 所以 $f(x)=\cos x$ 的 $2k+1$ 阶麦克劳林公式为

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\frac{(-1)^{k+1}\cos\theta x}{(2k+2)!}x^{2k+2},$$

- 其中 $0<\theta<1$.

- 类似地, 我们有 $(0<\theta<1)$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{(-1)^{k+1}\cos\theta x}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)}x^{n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \mathrm{C}_\alpha^1 x + \mathrm{C}_\alpha^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_\alpha^n x^n + \mathrm{C}_\alpha^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

- 其中 $\mathrm{C}_\alpha^k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

- 例* 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的带皮亚诺余项的麦克劳林公式.
- 解 由上一节的结论, $f(x)$ 任意阶可导.
- 由 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式可知

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n+1}+o(x^n).$$

- 由带皮亚诺余项的泰勒公式的唯一性, 这就是 $f(x)$ 的带皮亚诺余项的麦克劳林公式.

- 例* 求 $f(x)=\sin 2x\ln(1-x)$ 在 0 处的 1 至 4 阶导数.
- 解 由于

$$\sin 2x=2x-\frac{8}{3!}x^3+o(x^4),\qquad \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

- 因此

$$f(x)=\sin 2x\ln(1-x)=-2x^2-x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4),$$

$$f'(0)=0,\qquad f''(0)=(-2)2!=-4,$$

$$f'''(0)=(-1)3!=-6,\qquad f^{(4)}(0)=\frac{2}{3}\cdot 4!=16.$$

- **泰勒公式的应用举例**
- 泰勒公式的应用非常广泛，在这里我们列举一些实例来说明.
- 在近似计算中的应用
- 例 求 e 的近似值.
- 解 我们已经知道

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

- 令 $x = 1$，得 $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

- 其误差

$$|R_n(1)| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

- 因此，只要 n 充分大，我们就可以利用上式求得任意精度的 e 的近似值.
- 例如，若要误差不超过 10^{-5}，则取

$$n = 8, \qquad |R_n(1)| < \frac{3}{9!} = \frac{1}{120960} < 10^{-5}.$$

- 此时

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828.$$

- 例* 求 π 的近似值.
- 解 存在 $0 < \theta < 1$ 使得

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1},$$

- 因此

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x^2)^{n+1}} x^{2n+2}.$$

- 由 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 可知

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)(1+\theta x^2)^{n+1}}..$$

- 令 $x = 1$, 得到

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(1+\theta)^{n+1}}\right].$$

- 该余项 $|R_{2n+2}(1)| < \frac{1}{2n+3}$ 收敛非常慢, 所以人们想出了一些其它的收敛速度更快的形式来表达 π.

- 例如: 马钦公式 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

- 在极限计算中的应用

- 例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$.

- 解 这是 $\frac{0}{0}$ 型不定式，可用洛必达法则. 我们来看用泰勒公式的不同之处.

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right),\qquad \sin x=x+o\left(x^2\right),$$

- 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

- 例 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 求 a,b.
- 解 该极限是 1^∞ 型, 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}=0$.
- 由于 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)x+\left(\frac{1}{2}+a\right)x^2}{x^2}=0,$$

- 于是 $a=-\frac{1}{2}, b=-1$.

- 泰勒公式求极限问题一般用带皮亚诺余项的泰勒公式.
- 根据我们的需要确定展开的阶数, 并利用无穷小性质得出带皮亚诺余项的极限.
- 这种技巧实际上我们在之前利用一阶近似求极限时已经接触过.
- 例 设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域内有二阶连续导数, 且 $f'(a) \neq 0$. 求

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{f'(a)(x-a)}\right].$$

- 解 由于

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+o\big((x-a)^2\big),$$

- 因此当 $x\to a$ 时，$f(x)-f(a)\sim f'(a)(x-a)$，

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{f'(a)(x-a)}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{f'(a)[f(x)-f(a)](x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+o\big((x-a)^2\big)}{f'(a)(x-a)^2}=-\frac{f''(a)}{2f'(a)^2}.$$

- 在多项式重组中的应用
- 有时候, 我们需要将一个多项式按照 $(x-a)$ 的幂重新进行展开, 我们称之为多项式的重组.
- 此时, 我们需要计算 m 次多项式 $P(x)$ 对应的 $P^{(k)}(a)$, 其中 $k>m$ 时 $P^{(k)}(a)=0$, 因此我们只需求前 $P(a)$ 和前 m 个导数值即可. 然后

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\cdots+\frac{P^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m.$$

- 例 按 $(x+1)$ 的幂展开多项式 $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$.
- 解 注意到 $P(-1)=5$,

$$\begin{aligned} P'(x)&=3+10x-6x^2, & P'(-1)&=-13,\\ P''(x)&=10-12x, & P''(-1)&=22,\\ P'''(x)&=-12, & P'''(-1)&=-12,\end{aligned}$$

- 因此

$$\begin{aligned} P(x)&=5-13(x+1)+\frac{22}{2!}(x+1)^2-\frac{12}{3!}(x+1)^3\\ &=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.\end{aligned}$$

- 在证明中值等式中的应用
- 例 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. 证明存在 $\xi \in (-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$.
- 解 对任意 $x \in [-1,1]$, 存在 η 位于 0 和 x 之间, 使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\eta)}{6}x^3.$$

- 分别令 $x=-1$ 和 1, 得到

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\eta_1)}{6},$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\eta_2)}{6}.$$

- 两式相减得到

$$f'''(\eta_2)+f'''(\eta_1)=6.$$

- 于是 3 介于 $f'''(\eta_1)$ 和 $f'''(\eta_2)$ 之间.
- 由于 $f'''(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续, 因此由介值定理, $\exists\xi$ 位于 η_1,η_2 之间使得 $f'''(\xi)=3$.

- 在证明中值不等式中的应用

- 例 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=0, f(1)=1, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $|f''(\xi)|\geq 4$.

- 解 对任意 $x\in(0,1)$，存在 η 位于 $\frac{1}{2}$ 和 x 之间，使得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

- 分别令 $x=0$ 和 1，得到

$$0=f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\eta_1)}{8},\qquad \eta_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$
$$1=f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\eta_2)}{8},\qquad \eta_2\in\left(\frac{1}{2},1\right).$$

- 两式相减，得到 $f''(\eta_2)-f''(\eta_1)=8$.
- 当 $|f''(\eta_1)|\ge|f''(\eta_2)|$ 时，令 $\xi=\eta_1$；当 $|f''(\eta_1)|<|f''(\eta_2)|$ 时，令 $\xi=\eta_2$，则

$$8=|f''(\eta_2)-f''(\eta_1)|\le|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|\le2|f''(\xi)|,$$

- 即 $|f''(\xi)|\ge4$.

- 一般地, 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数且 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, 则存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.
- 可以看出, 使用泰勒中值证明这类问题时, 往往需要对 $f(x)$ 在某一点(经常是区间中间)作带拉格朗日余项的泰勒展开, 然后代入不同的 x 进去得到新的关系式. 通过新的关系式再结合放缩、连续性等性质来证明我们想要的结论.

4.4 函数的单调性与极值

- **函数的单调性**
- 回忆下证明 $f(x)=x^3$ 是单调增加函数的过程. 对于 $\forall x_1>x_2$, 我们需要分解

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right).$$

- 然后证明 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$, 于是 $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x)$ 单调递增.
- 有没有更简便的方法去研究函数的单调性呢? 在学习了导数之后, 我们可以利用导函数的符号来得到函数的单调性.

- **定理** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.
- (1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增;
- (2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减.
- **证明** (1) 任取 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $x_1<x_2$, 在 $[x_1,x_2]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

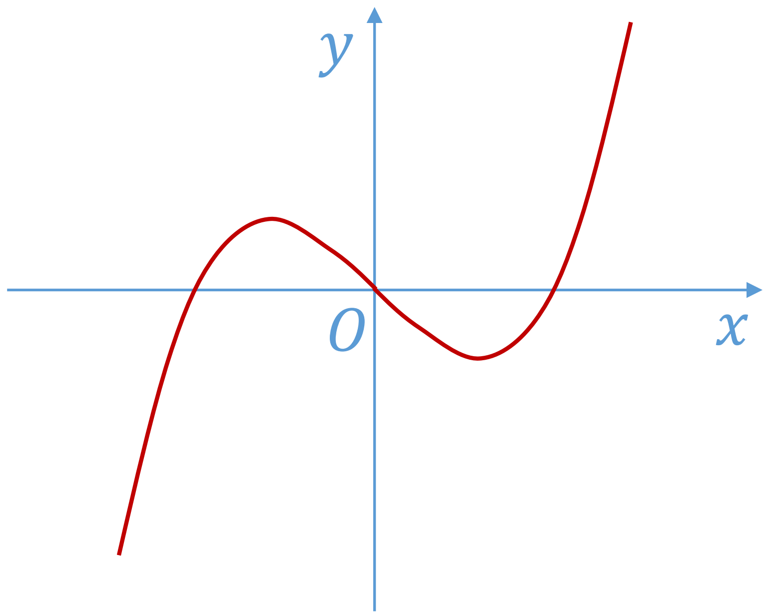
$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

- 由于 $f'(\xi)>0, x_2>x_1$, 因此 $f(x_2)>f(x_1)$. 由于 x_1,x_2 是任意的, 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. (2) 的证明类似.

- 将该定理中区间换成开区间或无穷区间结论仍然成立.
- 并非每个函数都在其定义域上单调, 因此需要判断它们在哪些区间上单调.
- 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增, 称 I 为 $f(x)$ 的单调增加区间. 类似地可以定义单调减少区间. 二者统称为单调区间.

- 例 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ 的单调区间.
- 解 该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且 $f'(x)=x^2-1$.
  - 当 $x<-1$ 时, $f'(x)>0$.
  - 当 $-1<x<1$ 时, $f'(x)<0$.
  - 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$.
- 因此 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的单调增加区间, $[-1,1]$ 是 $f(x)$ 的单调减少区间.

- 注意到 $f(x)$ 是奇函数且 $f(0)=0, f\left(\pm\sqrt{3}\right)=0$,因此 $f(x)$ 的图像大致如下:



- 前面定理描述了导数大于和小于零的情形的单调性，然而若 $f'(x)$ 在区间的某些点上为零，$f(x)$ 仍可能在该区间上单调.
- 例如 $\left(x^3\right)' = 3x^2$ 在 $x = 0$ 处为零，但 x^3 单调增加.
- **推论** 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在 I 上单调增加(或单调减少)的充要条件是
- (1) 对 $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$;
- (2) 在区间 I 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为零.

- 证明 我们只证明单调增加情形.
- 类似于前述定理的证明, 当对 $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x)$ 单调不减.
- 如果 $\exists x_1 < x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 则在区间 $[x_1, x_2]$ 上 $f(x) = f(x_1)$ 是常数, 从而导数为零, 与(2)矛盾! 因此充分性得证.
- 反之, 若 $f(x)$ 在 I 上单调增加, 则对 $\forall x > x_0, f(x) > f(x_0)$, 于是由极限保号性可知

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

- 如果在区间 I 的某个子区间上 $f'(x)$ 恒为零, 则在该区间上 $f(x)$ 为常数, 与 $f(x)$ 单调增加矛盾. 因此必要性得证.

- 例 求函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.
- 解 该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=2\sqrt[3]{x^2}+(2x-5)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

  - 当 $x<0$ 时, $f'(x)>0$.
  - 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$.
  - 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$.
- 因此 $(-\infty,0]$ 和 $[1,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的单调增加区间, $[0,1]$ 是 $f(x)$ 的单调减少区间.

- 求单调区间的方法和步骤
- (1) 计算 $f'(x)$ 并确定 $f(x)$ 的间断点, $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点.
- (2) 这些点将定义域划分为若干区间, 在每个开区间内
    - 如果 $f'(x)>0$, 则为单调递增区间;
    - 如果 $f'(x)<0$, 则为单调递减区间.
- (3) 如果 $f(x)$ 在单调区间的端点处连续, 将其包含在该单调区间中.
- 合并相邻的单调性相同的包含公共端点的区间.

- **例** 设 $f(x)$ 连续, $f'(0)>0$, 则 $\exists\delta>0$ 使得(　　).

  (A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加

  (B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少

  (C) $\forall x\in(0,\delta)$, 有 $f(x)>f(0)$

  (D) $\forall x\in(-\delta,0)$, 有 $f(x)>f(0)$

- **解** 显然 BD 错误, 取 $f(x)=x$ 即可.

- 由于 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$, 由极限的保号性, $\exists\delta>0$ 使得 $\frac{f(x)-f(0)}{x}>0, \forall x\in(0,\delta)$, 即 $f(x)>f(0)$, 选 C.

- 考虑 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{2x}+x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 则 $f'(0)=1>0$.
- 令 $x_k=\frac{1}{2k-1}$, 则

$$f(x_k)=x_k^2\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi+x_k=x_k+(-1)^{k+1}x_k^2,$$

$$f(x_{2k+1})-f(x_{2k})=\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k-1}+\frac{1}{(4k+1)^2}+\frac{1}{(4k-1)^2}=\frac{4}{(16k^2-1)^2}>0.$$

- 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$, 因此不存在 $\delta>0$ 使得 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上单调增加. 故 A 不正确.

- 利用单调性可以讨论方程的根(即函数零点)的个数, 也可以利用单调性来证明一些不等式.
- 例 证明方程 $x^3+x^2+2x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内只有一个实根.
- 解 令 $f(x)=x^3+x^2+2x-1$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 由于 $f(0)=-1<0, f(1)=3>0$, 由零点定理, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有实根.
- 由于 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)=3x^2+2x+2>0$, 因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加, 从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内只有一个实根.

- **函数的极值**

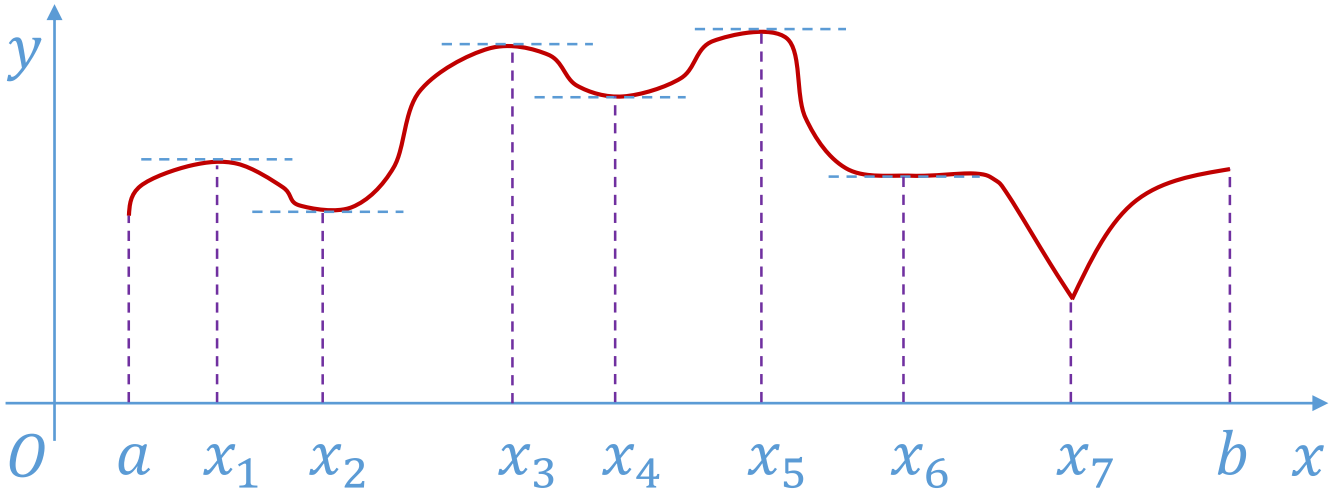
- 我们在中学已经接触过函数的极值，但由于所学知识有限，很多关于极值的问题用初等的方法难以解决. 而现在对于一个函数，当我们知道它的单调区间后，便可讨论它的极值点和极值了.

- 定义 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果对于该邻域内 $\forall x \neq x_0$，恒有

$$f(x) < f(x_0) \quad \left(\text{或 } f(x) > f(x_0)\right)$$

- 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值 (或极小值)，x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极大值点 (或极小值点).

- 极大值和极小值统称为极值，极大值点和极小值点统称为极值点.
- 注意，极值点总是函数 $f(x)$ 的定义区间内的一点 (不可能是端点).
- 对于下图函数，x_1, x_3, x_5 为极大值点，x_2, x_4, x_7 为极小值点.
- 由于极值反映的是函数的局部性质，因此函数的极小值有可能比它的极大值还大，例如 $f(x_4) > f(x_1)$.

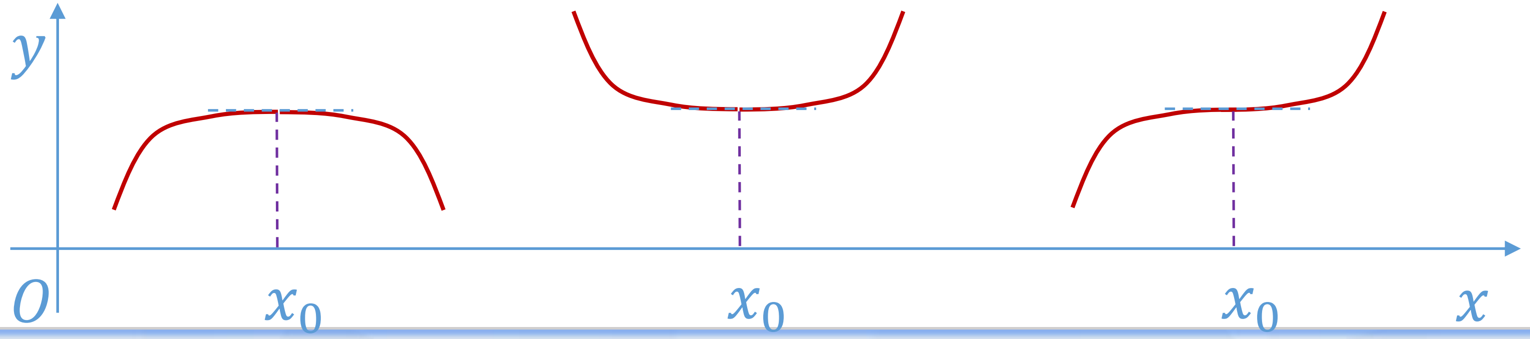


- 下面我们利用导数来建立函数极值的判定方法.
- 极值的必要条件 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 x_0 是它的一个极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.
- 证明 由费马定理可得.
- 该定理的几何意义: 如果曲线 $y = f(x)$ 在极值点处有不垂直于 x 轴的切线, 则切线必然时水平的.

- 然而，该定理的逆命题却并不正确，例如前面的函数图像中，$f'(x_6)=0$ 但 x_6 却并不是一个极值点.
- 同时，x_7 是 $f(x)$ 的一个极值点，但 $f(x)$ 在这个点处不可导.
- 定义 若 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的驻点或稳定点.
- 驻点和不可导点是可能的极值点. 下面我们将给出判断函数极值的一个充分条件.

- 极值的第一充分条件 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在 x_0 的一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导.
- (1) 如果在点 x_0 的左右两侧附近 $f'(x)$ 符号相反，则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点.
- 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)>0$, $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)<0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.
- 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时 $f'(x)<0$, $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时 $f'(x)>0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.
- (2) 如果在点 x_0 的左右两侧附近 $f'(x)$ 符号相同，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

- 该定理的证明过程和结论可表述为:
  - 导数左正右负, 函数左增右减, 极大值点;
  - 导数左负右正, 函数左减右增, 极小值点;
  - 导数左右同号, 函数单调, 不是极值点.
- 由于不要求 $f'(x_0)$ 存在, 因此该定理对驻点和不可导点均适用.
- 该定理的几何意义如下图所示.



- **极值的第二充分条件** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导且 $f'(x_0)=0$.
- (1) 如果 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.
- (2) 如果 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.
- (3) 如果 $f''(x_0)=0$, 则 x_0 可能是 $f(x)$ 的极值点也可能不是.
- **证明** 如果

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0,$$

- 则由极限的保号性, $\exists\delta>0$ 使得 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时 $\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$.

- 因此，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$. 由极值的第一充分条件，x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.
- $f''(x_0)>0$ 情形类似可证.
- 对于 $f(x)=x^4, f''(0)=f'''(0)=0$，此时 $x=0$ 是极小值点.
- 对于 $f(x)=x^3, f''(0)=f'''(0)=0$，此时 $x=0$ 是不是极值点.
- 可以看出 $f''(x_0)=0$ 时不能用该定理判定是否取得极值.

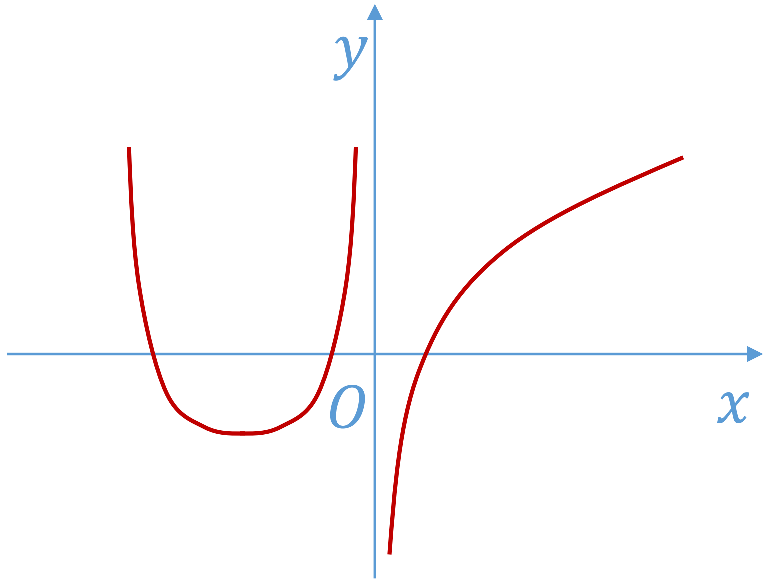
- 求函数极值的方法和步骤
- (1) 确定 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点 x_0 (不包括间断点和端点).
- (2) 如果 $f''(x_0)<0$ 或者 $f'(x)$ 在 x_0 两侧左正右负, x_0 为极大值点.
- (3) 如果 $f''(x_0)>0$ 或者 $f'(x)$ 在 x_0 两侧左负右正, x_0 为极小值点.

- 例 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 有几个驻点?
- 解 当 $x \neq 1,2,3$ 时,

$$f'(x) = \frac{[(x-1)(x-2)(x-3)]'}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

- 令 $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, 则 $g(1) = g(2) = g(3) = 0$. 由罗尔中值定理, $\exists \xi_1 \in (1,2), \xi_2 \in (2,3)$ 使得 $g'(\xi_1) = 0, g'(\xi_2) = 0$.
- 由于 $g'(x)$ 是二次多项式, 最多有两个零点, 因此 $g'(x)$ 恰有两个零点, $f(x)$ 有两个驻点.
- 一般地, $f(x) = \ln|(x-a_1)\cdots(x-a_n)|$ 有 $n-1$ 个驻点, 其中 a_i 两两不同.

- **例** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 其导函数的图像如右图所示, 则 $f(x)$ 有(　　).



(A) 一个极小值点和两个极大值点

(B) 两个极小值点和一个极大值点

(C) 两个极小值点和两个极大值点

(D) 三个极小值点和一个极大值点

- **解** 从图像上可以看出 $f(x)$ 有三个驻点和一个不可导点 $x=0$. 每个驻点的左右两侧附近的导数符号相反, 分别对应两个极小值点和一个极大值点. 在 $x=0$ 左右两侧附近的导数左正右负, 因此是极大值点, 选 C.

- 例 求函数 $f(x)=x^4-2x^2+2$ 的极值.
- 解 由

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

- 可知 $f(x)$ 有三个驻点 $0,-1,1$. 由于

$$f''(x)=12x^2-4, \qquad f''(0)=-4<0, \qquad f''(\pm 1)=8>0,$$

- 因此
- (1) $x=0$ 是极大值点, 极大值为 $f(0)=2$.
- (2) $x=\pm 1$ 是极小值点, 极小值为 $f(\pm 1)=1$.

- 例 求函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.
- 解 该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

- 因此 $f(x)$ 的驻点为 $x=1$.
- (1) 在点 0 附近, $f'(x)$ 左正右负, 因此 0 是 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(0)=0$.
- (2) 在点 1 附近, $f'(x)$ 左负右正, 因此 1 是 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(1)=-3$.

- 例 设函数 $f(x)$ 的在点 x_0 处有 n 阶连续导数, 且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- 证明:
- (1) 当 n 为奇数时, x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.
- (2) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.
- (3) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

- 证明 由带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big)$$

- 得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big),$$

- 即

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}.$$

- 因此 $\exists\delta>0$ 使得 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$ 与 $f^{(n)}(x_0)$ 同号.
- (1) 当 n 为奇数时, $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 两侧附近异号, x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.
- (2) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, $f(x)-f(x_0)>0$, x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.
- (3) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, $f(x)-f(x_0)<0$, x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.
- 该例题可作为结论直接使用.
- 例 设 $\varphi(x)$ 四阶可导, 且 $\varphi(0)>0$. 设 $f(x)=x^3\varphi(x), g(x)=x^4\varphi(x)$, 则

  $f'(0)=f''(0)=0, f'''(0)>0,\qquad g'(0)=g''(0)=g'''(0)=0, g^{(4)}(0)>0,$
- 所以 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 是 $g(x)$ 的极小值点.

- **最大值与最小值问题**
- 最值问题，即求函数的最大最小值，在实际生活和科学研究中经常遇到．那么如何去求一个函数的最大值和最小值呢？
- 我们知道，$[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必有最大值和最小值．最大值和最小值可能在 (a,b) 内取得，也可能在端点处取得．
- 如果函数在 (a,b) 内某一点 x_0 处取得最大值或最小值，则 x_0 可能是极值点．但即便 x_0 不是极值点，它至少是广义极值点，即一个邻域内的最值点．
- 因此，最值点是驻点、不可导点或端点．

- 求有限闭区间上连续函数 $f(x)$ 的最大最小值的方法:
- (1) 计算 $f'(x)$ 并求出 (a,b) 内所有的驻点和不可导点 $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- (2) 计算函数值 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ 以及 $f(a), f(b)$.
- (3) 这些函数值中的最大最小值就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大最小值.

- 例 求函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.
- 解 $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, 因此驻点为 $x = 0,1$.
- 由于

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = -1, \qquad f(-1) = -5, \qquad f(2) = 4,$$

- 因此 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 -5.

- 对于不是闭区间的情形，我们该如何求得最值呢？我们以下面的例子来进行说明.
- 例 求函数 $f(x)=x^{2x}$ 在 $(0,1]$ 上的最小值.
- 解 $f'(x)=\left(e^{2x\ln x}\right)'=2x^{2x}(\ln x+1)$，因此驻点为 $x=\frac{1}{e}$.
- 当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$. 因此 $\frac{1}{e}$ 是最小值点，最小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$.

- 例 假设某种商品的需求量 Q 是单价 p (单位: 元)的函数, $Q = 6000 - 30p$, 商品的单件成本 $C = 24000/Q + 40$, 试求利润最大化的商品定价以及最大利润.
- 解 利润

$$L(p) = Q(p - C) = -30p^2 + 7200p - 264000.$$

- 由 $L'(p) = -60p + 7200 = 0$ 得到唯一驻点 $p = 120$.
- 由于 $L''(120) = -60 < 0$, 因此

$$L_{\max} = L(120) = 168000,$$

- 即商品定价为 120 元时利润最大, 为 168000 元.

- 例 某乡镇计划建一个粮仓，其下部为含底的圆柱体，上部位半球体．设半球体每平方米造价是圆柱体的两倍．如果粮食只能存储在圆柱体部分，那么在粮仓储量需求固定的前提下，如何选择圆柱体高与底面半径之比使造价最低？

- 解 设圆柱体底面半径为 r，高为 $h=\lambda r$，圆柱体每平方米造价为 a，粮仓储量为 $b=\pi r^2 h=\lambda\pi r^3$．因此 $r=\sqrt[3]{\frac{b}{\lambda\pi}}$，造价为

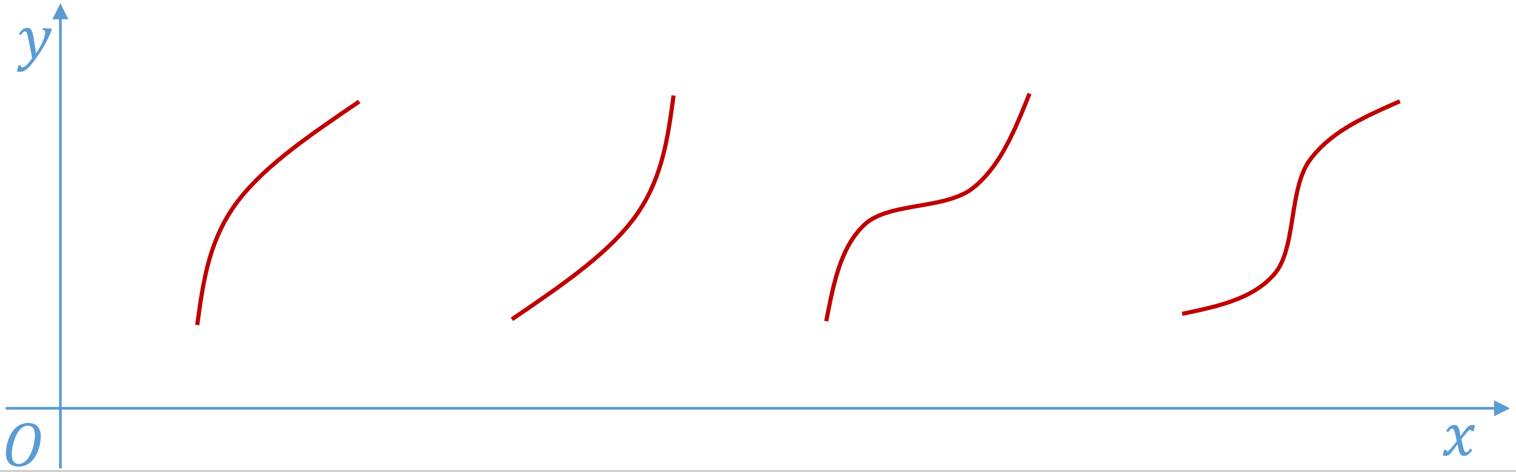
$$C=a\left(\pi r^2+2\pi r\cdot\lambda r\right)+2a\cdot 2\pi r^2=a\sqrt[3]{\pi b^2}\left(2\lambda^{\frac{1}{3}}+5\lambda^{-\frac{2}{3}}\right).$$

- 由 $C'(\lambda)=\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\pi b^2}(\lambda-5)\lambda^{-\frac{5}{3}}=0$ 得到唯一驻点 $\lambda=5$.

- 由于在 $\lambda=5$ 附近 $C'(\lambda)$ 左负右正，因此 $\lambda=5$ 时 C 最小，即当圆柱体高与底面半径之比为 $5:1$ 时，造价最低．

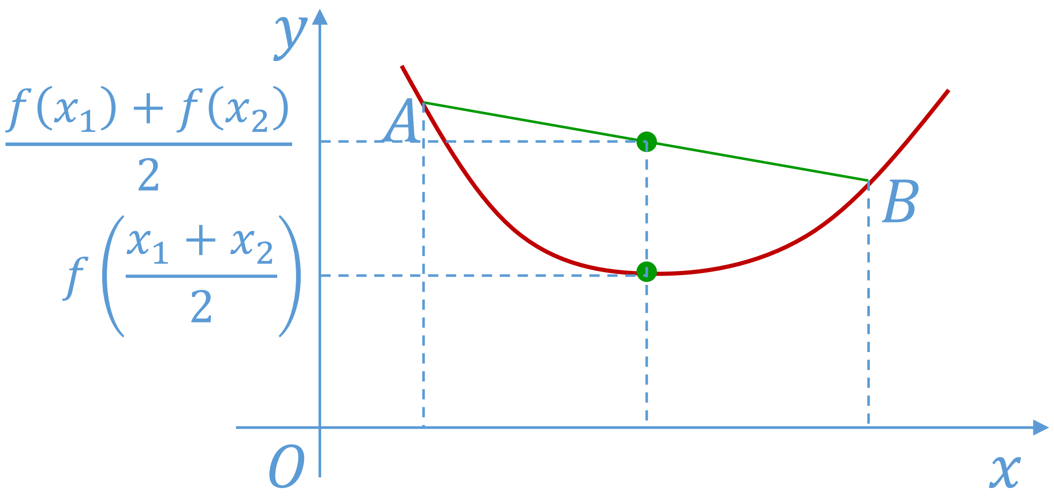
4.5 曲线的凹凸性和拐点

- 上一节中，我们讨论了函数的单调性和极值. 从几何上讲，单调性反映的是曲线的升降，极值反映的是曲线的"峰值"或"谷底".
- 然而，仅从单调性和极值来了解函数的图像时不够的. 比如当函数 $f(x)$ 在某区间单调增加时，其方式可以是多种多样的. 以下图为例，它们具有不同的弯曲方向. 这种性态被称为凹凸性.



- **曲线的凹凸性**

- 从几何图形上看，若曲线 $y=f(x)$ 在所定义的区间 I 上是凹的，则连接曲线上的任意不同两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$. 除去端点 A,B 外，整段弦 $\overline{AB}$ 位于弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上方.



- 设 $(x, f(x))$ 在弦 $\overline{AB}$ 上, 设 $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, 则 $\lambda \in (0,1)$ 且

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

- 可以证明, 这等价于,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \qquad \forall x_1 \neq x_2 \in I.$$

- 由此, 我们得到如下定义.

- **定义** 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上(内)连续. 如果

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \qquad \forall x_1\neq x_2\in I,$$

- 则称曲线 $y=f(x)$ 在 I 上(内)是凹的, 称 I 为曲线 $y=f(x)$ 的凹区间.
- 如果

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \qquad \forall x_1\neq x_2\in I,$$

- 则称曲线 $y=f(x)$ 在 I 上(内)是凸的, 称 I 为曲线 $y=f(x)$ 的凸区间.

- 直接从定义出发判定一条曲线的凹凸性是比较困难的, 下面介绍利用导数的符号确定曲线凹凸性的方法.
- **定理** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导.
- (1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)$ 单调递增, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)$ 单调递减, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.
- **证明** 我们只证明(1), (2)的情形类似可证.
- $\forall x_1\neq x_2\in[a,b]$, 不妨设 $x_1<x_2$. 记 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, 则

$$a\leq x_1<x_0<x_2\leq b.$$

- 由拉格朗日中值定理, $\exists \xi_1 \in (x_1, x_0), \xi_2 \in (x_0, x_2)$ 使得

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x_1 - x_0) = f(x_0) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)f'(\xi_1),$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(\xi_2)(x_2 - x_0) = f(x_0) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)f'(\xi_2),$$

- 于是

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + \frac{x_2 - x_1}{2}[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)].$$

- 由于在 (a, b) 内 $f'(x)$ 单调递增, 因此 $f'(\xi_2) > f'(\xi_1)$,

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f(x_0) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

- 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹的.

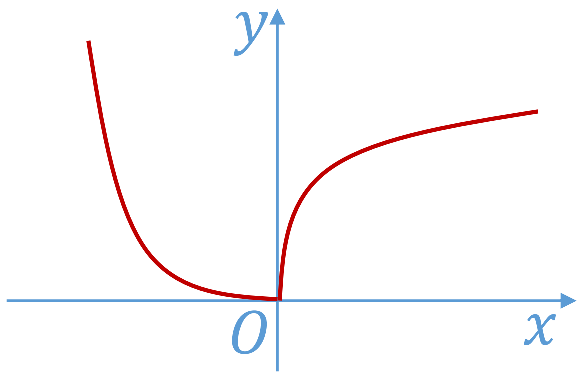
- 由此可知, 如果 $f(x)$ 可导, 则研究曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性和研究 $f'(x)$ 的单调性是等级的. 由上一节内容我们有:
- **定理** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 内可导.
- (1) 如果 $f''(x)>0, \forall x \in (a,b)$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的.
- (2) 如果 $f''(x)<0, \forall x \in (a,b)$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.
- 记忆时, 只需从几何直观记住
- $f''>0 \Rightarrow f'$ 单增⇒切线斜率越来越大⇒凹的
- $f''<0 \Rightarrow f'$ 单减⇒切线斜率越来越小⇒凸的

- 例 讨论下列函数的凹凸性.
- (1) $y = e^{x^2}$; (2) $y = x^3 - 2x^2 + 5$.
- 解 (1) $y' = 2xe^{x^2}, y'' = \left(4x^2 + 2\right)e^{x^2} > 0$, 所以 $y = e^{x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.
- (2) $y' = 3x^2 - 4x, y'' = 6x - 4 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)$.
- 当 $x < \frac{2}{3}$ 时, $y'' < 0$, 所以 y 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ 内是凸的.
- 当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y'' > 0$, 所以 y 在 $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 内是凹的.

- **拐点**
- 和单调性与极值点的关系类似，曲线的凹凸性的转折点对研究曲线形状来说非常重要.
- 例如曲线 $y = x^3 - 2x^2 + 5$ 上 $\left(\frac{2}{3}, \frac{119}{27}\right)$ 就是由凸弧向凹弧变化的转折点.
- **定义** 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 对于 $x_0 \in (a, b)$, 如果 $\exists \delta > 0$ 使得在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性相反, 就称 $\big(x_0, f(x_0)\big)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点.
- **定理** 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且点 $\big(x_0, f(x_0)\big)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

- 拐点的充分条件 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$ 内连续, 在去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内二阶可导.
- (1) 如果在点 x_0 两侧邻域 $f''(x)$ 的符号相反, 则点 $\big(x_0,f(x_0)\big)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点;
- (2) 如果在点 x_0 两侧邻域 $f''(x)$ 的符号相同, 则点 $\big(x_0,f(x_0)\big)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

- 与极值点类似，拐点处并不要求 $f''(x)$ 或者 $f'(x)$ 存在.
- 例 $f(x) = |x(x-1)|$ 在 $x = 0,1$ 处不可导，但 $(0,0),(1,0)$ 却是拐点.
- 例 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处不可导，但 $(0,0)$ 却是一个拐点.

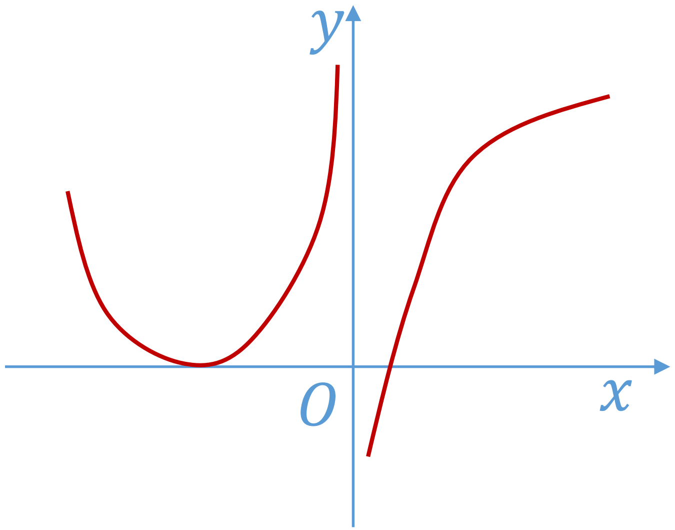


- 例 求函数 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点.
- 解 $f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-5)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}(x-2)x^{-\frac{1}{3}}$,

$$f''(x) = \frac{5}{3}\left[x^{-\frac{1}{3}} + (x-2)\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}\right] = \frac{10}{9}(x+1)x^{-\frac{4}{3}}.$$

- $f''(x)$ 的零点有 $x=-1$, $f''(x)$ 不存在的点有 $x=0$.
- 在 $x=-1$ 两侧附近 $f''(x)$ 符号不同, 因此 $(-1,-6)$ 是拐点.
- 在 $x=0$ 两侧附近 $f''(x)>0$, 因此 $(0,0)$ 不是拐点.

- **例** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其二阶导数 $f''(x)$ 函数图像如下图所示，则曲线 $y=f(x)$ 有几个拐点?
- **解** 从图像上可以看出 $f(x)$ 二阶导数为零和不存在的点一共有三个，其中两个左右两侧 $f''(x)$ 符号不同，因此有两个拐点.



- 例 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$ 且 $f'(1)=0$，则

  (A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值

  (B) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值

  (C) $(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

  (D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(1,f(1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

- 解 由 $f'(1)=0$ 可知 $x=0$ 是驻点. 再由 $f(x)$ 满足的关系式可知

$$f''(1)=1-e^{-1}>0$$

- 故 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值，选 B.

- 例 已知 (1,3) 是曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的一个拐点, 求曲线的凹凸区间.
- 解 由于

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx, \qquad f''(x) = 6ax + 2b,$$

- 因此 $f''(1) = 6a + 2b = 0$. 又因为 $f(1) = a + b = 3$, 所以

$$a = -\frac{3}{2}, \qquad b = \frac{9}{2}, \qquad f(x) = -\frac{3}{2}(x^3 - 3x^2),$$

$$f'(x) = -\frac{9}{2}(x^2 - 2x), \qquad f''(x) = -9(x - 1).$$

- 由 $f''(x) = 0$ 得 $x = 1$.
- 当 $x < 1$ 时, $f''(x) > 0$. 当 $x > 1$ 时, $f''(x) < 0$.
- 因此 $(-\infty, 1]$ 是凹区间, $[1, +\infty)$ 是凸区间.

- 求函数的凹凸区间和拐点的方法:
- (1) 确定 $f(x)$ 的定义域.
- (2) 计算 $f'(x), f''(x)$ 并确定 $f(x)$ 的间断点, $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$ 不存在的点.
- (3) 这些点将定义域划分为若干区间, 在每个开区间内
  - 如果 $f''(x)>0$ 或者 $f'(x)$ 单调递增, 则为凹区间;
  - 如果 $f''(x)<0$ 或者 $f'(x)$ 单调递减, 则为凸区间.
- (4) 如果 $f(x)$ 在凹凸区间的端点处连续, 将其包含在该凹凸区间中.
- 合并相邻的凹凸性相同的包含公共端点的区间.
- (5) 曲线 $y=f(x)$ 上两侧凹凸性不同的点就是拐点.

- 例 设函数 $f(x)$ 的在点 x_0 处有 $n \geq 3$ 阶连续导数, 且

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- 证明当且仅当 n 为奇数时, $\big(x_0, f(x_0)\big)$ 是 $f(x)$ 的拐点.
- 证明 由上一节结论可知, 当且仅当 n 为奇数时, x_0 是 $f'(x)$ 的极值点.
- 这等价于 x_0 两侧附近 $f'(x)$ 单调性不同, 即曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性不同, 从而等价于 x_0 是拐点.
- 该例题可作为结论直接使用. 例如 $(0,0)$ 是 $y = x^{2k+1}$ 的拐点, 但不是 $y = x^{2k}$ 的拐点.

4.6 函数图形的描绘

- 对于一个函数而言，需要对它的单调性、极值点、凹凸性、拐点、零点、渐进性进行描绘，才能正确地描绘它的图形.
- 我们已经对前面几点有一些研究的手段了，现在我们来考虑渐近线.
- **渐近线**
- 定义 设 a,b 不全为零. 若 $\lim[ax+bf(x)+c]=0$，其中点 $\big(x,f(x)\big)$ 沿某个方向趋于无穷远，即它和直线 $ax+by+c=0$ 的距离趋于零，则称该直线是 $y=f(x)$ 的渐近线.

- 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+(\text{或}x_0^-)} f(x)=\infty$, 称 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.
- 若 $\lim\limits_{x\to+\infty(\text{或}-\infty)} f(x)=A$, 称 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.
- 其它的渐近线 $y=ax+b\ (a\neq 0)$ 被称为斜渐近线.
- 例 曲线 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 有水平渐近线 $y=0$.
- 曲线 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$ 有垂直渐近线 $x=0$.
- 曲线 $y=\tan x$ 有垂直渐近线 $x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k\in\mathbb{Z}$.

- 曲线 $y = \operatorname{arccot} x$ 有水平渐近线 $y = 0, y = \pi$.
- 曲线 $y = \sec x$ 具有垂直渐近线 $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 曲线 $y = \csc x$ 具有垂直渐近线 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 曲线 $y = x^{\mu}(\mu < 0)$ 具有垂直渐近线 $x = 0$ 和水平渐近线 $y = 0$.
- 曲线 $y = \frac{x-1}{x+1}$ 具有垂直渐近线 $x = -1$ 和水平渐近线 $y = 1$.
- 曲线 $y = x + \frac{1}{x}$ 具有垂直渐近线 $x = 0$ 和斜渐近线 $y = x$.
- 曲线 $y = \sqrt{1 + x^2}$ 具有斜渐近线 $y = \pm x$.

- 设 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线或斜渐近线, 则

$$\lim_{x \to +\infty\ (\text{或} -\infty)} [f(x) - ax - b] = 0.$$

- 从而

$$\lim_{x \to +\infty\ (\text{或} -\infty)} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty\ (\text{或} -\infty)} \left[\frac{f(x) - ax - b}{x} + a + \frac{b}{x}\right] = a.$$

- 再由上述极限求得的 a, 求出

$$\lim_{x \to +\infty\ (\text{或} -\infty)} [f(x) - ax] = b,$$

- 从而得到水平渐近线或斜渐近线.

- 求渐近线的方法和步骤
- (1) 计算 $a_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, a_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (2) 计算 $b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - a_1 x], b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - a_2 x]$ 得到水平渐近线和斜渐近线 $y = a_i x + b_i$ (最多两条).
- (3) 判断 $f(x)$ 的间断点以及定义域的端点 x_0, 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$, 则得到垂直渐近线 $x = x_0$.
- 这也意味着第一类间断点处不可能有渐近线.

- 例 求曲线 $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线.
- 解 因为 $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$ 处处连续, 所以它没有垂直渐近线.
- 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2,\qquad \lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0,$$

- 因此它有斜渐近线 $y=2x$.

- 例 求曲线 $y=\sqrt{x^2+x+1}$ 的渐近线.
- 解 因为 $y=\sqrt{x^2+x+1}$ 处处连续, 所以它没有垂直渐近线.
- 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t+t^2}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}(t+t^2)}{t}=\frac{1}{2},$$

- 因此 $y=x+\frac{1}{2}$ 是它的斜渐近线.

- 上述推导是错误的，因为我们要区分 $\pm\infty$ 的情形.
- 当 $x \to +\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\frac{1}{2}$，此时有斜渐近线 $y=x+\frac{1}{2}$.
- 当 $x \to -\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(y+x)=-\frac{1}{2}$，此时有斜渐近线 $y=-x-\frac{1}{2}$.
- 这说明在不同的方向上，曲线可以有不同的同类渐近线.

- 例 曲线 $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 有几条渐近线?
- 解 由于 $x=\pm1$ 是它的间断点, 且 $\lim\limits_{x\to\pm1} y=\infty$, 因此 $x=\pm1$ 是它的垂直渐近线.
- 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=0,\qquad \lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1,$$

- 因此 $y=1$ 是它的水平渐近线. 一共有三条渐近线.

- 设 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 是非零多项式且没有公因子.
- 对于 $Q(x)$ 的每个零点 x_0, $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.
- 设 $f(x)=g(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$, 其中 $g(x), r(x)$ 是多项式且 $\deg r<\deg Q$.
- 如果 $g(x)=b$, 则 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.
- 如果 $g(x)=ax+b\ (a\neq 0)$, 则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.
- 如果 $\deg g\geq 2$, 则曲线 $y=f(x)$ 没有水平和斜渐近线.

- 例 曲线 $y = \frac{x^3-2}{x^2+1}$ 有几条渐近线?
- 解 由于 $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$ 没有间断点, 因此它没有垂直渐近线.
- 因为 $y = x - \frac{x+2}{x^2+1}$, 所以它有斜渐近线 $y = x$.
- 例 曲线 $y = \frac{x^2+x}{x^2-1}$ 有几条渐近线?
- 解 当 $x \neq -1$ 时, $y = \frac{x}{x-1}$.
- 因此 $x = 1$ 是它的垂直渐近线.
- 因为 $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ $(x \neq -1)$, 所以它有水平渐近线 $y = 1$.

- 例 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 有几条渐近线?
- 解 由于 $y(1^+) = \frac{e\pi}{2}, y(1^-) = -\frac{e\pi}{2}$, 因此 1 是跳跃间断点.
- 由于 $y\left((-2)^+\right) = -\frac{e^{\frac{1}{4}}\pi}{2}, y\left((-2)^-\right) = \frac{e^{\frac{1}{4}}\pi}{2}$, 因此 -2 是跳跃间断点.
- 当 $x \to 0$ 时, $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, $y \to -\infty$, 因此 $x = 0$ 是它的垂直渐近线.
- 由于 $\lim\limits_{x\to\infty} y = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, 所以它有水平渐近线 $y = \frac{\pi}{4}$.
- 一共有两条渐近线.

- 例 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 有几条渐近线?
- 解 由于 $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$, 因此 $x=0$ 是它的垂直渐近线.
- 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=0,$$

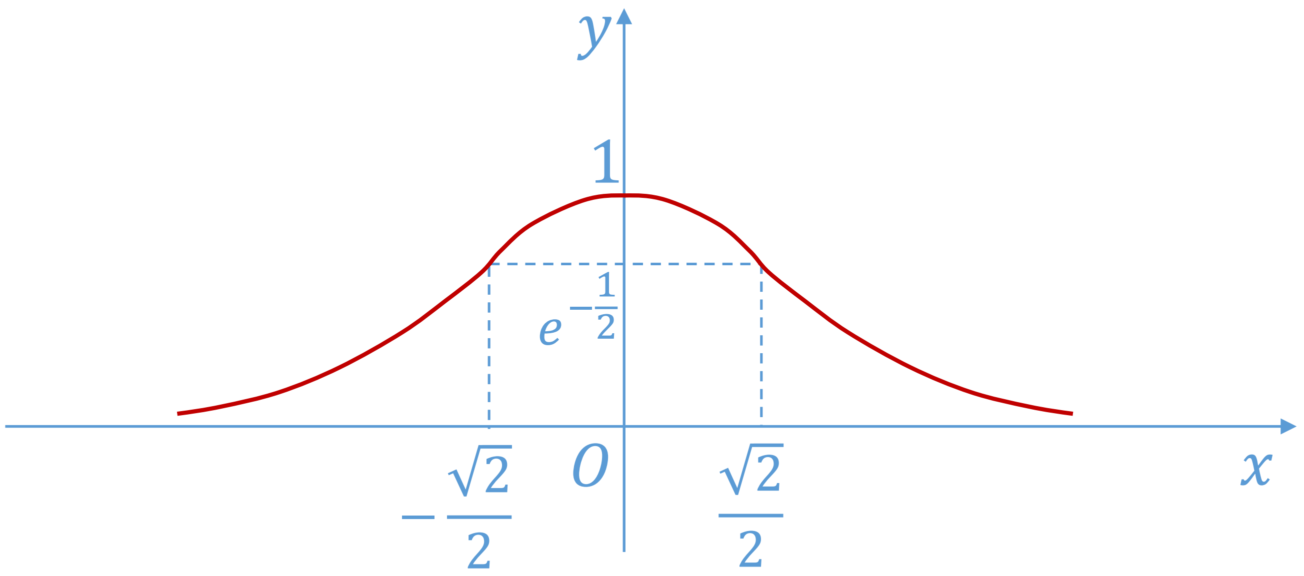
- 因此它有斜渐近线 $y=x$.
- 由于 $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$, 因此它有水平渐近线 $y=0$. 一共有三条渐近线.

- **函数图形的描绘**
- 通过以上各节的讨论，描绘函数图形的一般步骤为:
- (1) 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域、周期性和奇偶性.
- (2) 讨论函数的单调性与极值，确定曲线的凹凸性与拐点.
- (3) 确定曲线的渐近线.
- (4) 必要时找一些辅助点，然后描绘函数图形.

- 例 作出函数 $y=e^{-x^2}$ 的图形.
- 解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 且该函数为偶函数, 其图形关于 y 轴对称.
- (2) $y'=-2xe^{-x^2}$ 的零点为 $x=0$, $y''=2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$ 的零点为 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 于是

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
曲线	$\nearrow$	拐点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\nearrow$	极大值点 $(0,1)$	$\searrow$	拐点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\searrow$

- (3) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$, 所以曲线有水平渐近线 $y = 0$.



- 绘制函数图像时，要体现函数的形态，不必过分拘泥于具体的点是否精确，而是把函数图像作为函数性质的一种直观体现表示出来.

- 例 作出函数 $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的图形.
- 解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.
- (2) $y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$ 的零点为 $x=-1,5$, $y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$ 的零点为 $x=-1$.

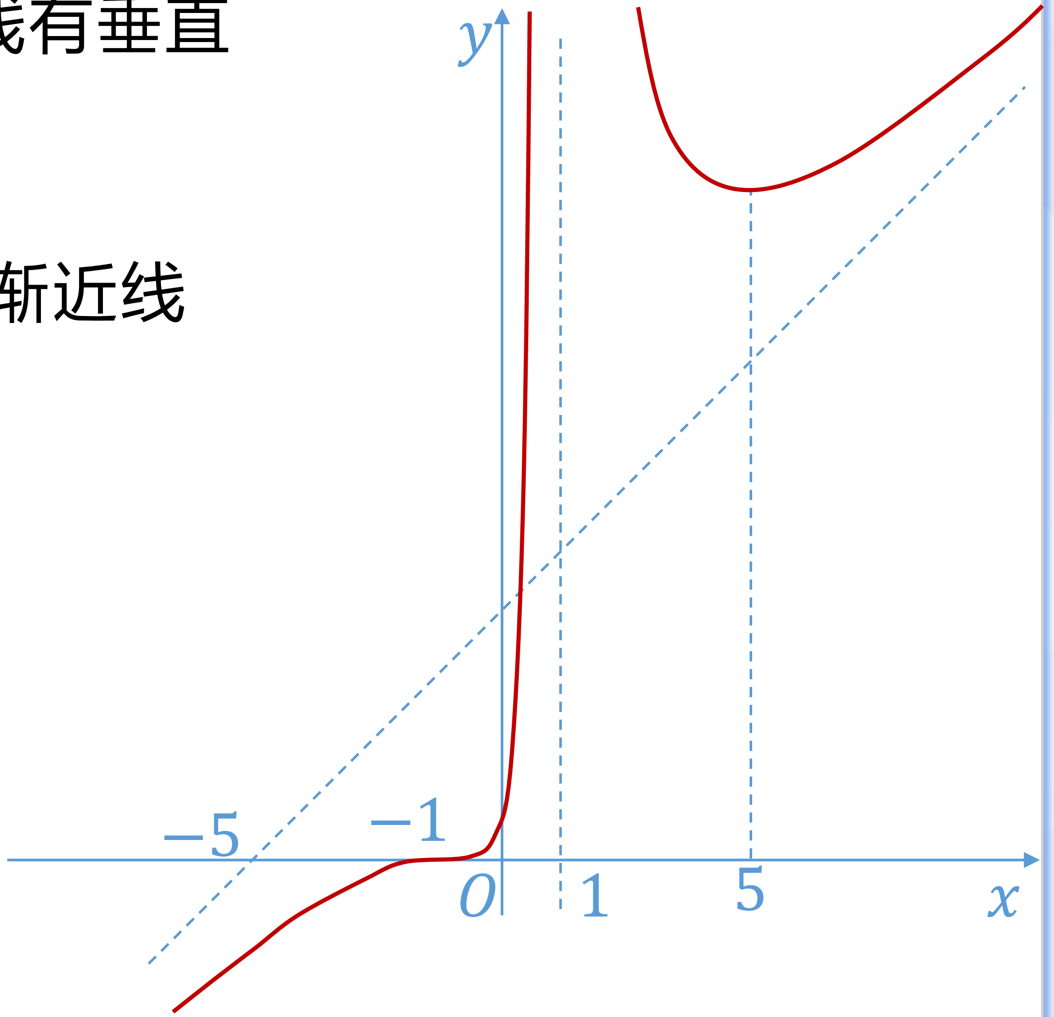
于是

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	$+$	0	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	不存在	$+$	$+$	$+$
曲线	$\nearrow$	拐点 $(-1,0)$	$\nearrow$	间断点	$\searrow$	极小值点 $\left(5,\frac{27}{2}\right)$	$\nearrow$

- (3) 因为 $x = 1$ 是无穷间断点, 所以曲线有垂直渐近线 $y = 0$.

- 因为 $y = x + 5 + \frac{12x-4}{(x-1)^2}$, 所以曲线有斜渐近线 $y = x + 5$.

- (4) $y(0) = 1$.



4.7 导数在不等式和等式中的应用

- **利用单调性证明不等式**
- 例 设 $e < a < b < e^2$，证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.
- 分析 从题目中可以看出，我们证明函数 $f(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$ 在 (e, e^2) 上单调递增即可.
- 证明 设 $f(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$，则

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}, \qquad f''(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}.$$

- 当 $x \in (e, e^2)$ 时，$f''(x) < 0$，因此 $f'(x)$ 单调递减，$f'(x) > f'(e^2) = 0$.
- 故 $f(x)$ 在 (e, e^2) 上单调递增，$f(b) > f(a)$，即 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

- 这题也可以用中值定理. 设 $g(x)=\ln^2 x$, 则由拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(\xi).$$

- 我们只需证明 $g'(\xi)>\frac{4}{e^2}$.
- 当 $x\in(e,e^2)$ 时, 由于 $g'(x)=\frac{2\ln x}{x}, g''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}<0$, 因此 $g'(x)$ 单调递减, $g'(x)>g'(e^2)=\frac{4}{e^2}$, 证毕.

- **例** 证明 $2021^{2022} > 2022^{2021}$.
- **分析** 化简一下可得 $2022\ln 2021 > 2021\ln 2022$, $\frac{2022}{\ln 2022} > \frac{2021}{\ln 2021}$.
- 因此我们需要证明 $f(2022) > f(2021)$, 其中 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
- **证明** 设 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
- 当 $x > e$ 时, $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$.
- 因此 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $f(2022) > f(2021)$, 化简可得 $2021^{2022} > 2022^{2021}$.

- 也可以取 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, \ln x-\ln\ln x$ 等函数类似地证明.
- 例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $f'(x)$ 单调递减, $f(0)=0$. 证明当 $x\in(0,1)$ 时, $f(1)x<f(x)<f'(0)x$.
- 证明 设 $g(x)=f(x)-f'(0)x$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.
- 当 $x\in(0,1)$ 时, $g(x)=f'(x)-f'(0)<0$. 所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减.
- 故当 $x\in(0,1)$ 时,

$$g(x)<g(0)=0,\qquad f(x)<f'(0)x.$$

- 设 $h(x)=f(x)-f(1)x$, 则 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $h(0)=h(1)=0$.
- 当 $x\in(0,1)$ 时, $h'(x)=f'(x)-f(1)$.
- 由于 $h(0)=h(1)=0$, 因此由罗尔定理, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $h'(\xi)=0$.
- 由于 $h'(x)$ 单调递减, 因此 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上先增后减.
- 故当 $x\in(0,1)$ 时,

$$h(x)>\min\{h(0),h(1)\}=0,\qquad f(x)>f(1)x.$$

- **利用中值定理证明不等式**
- 利用拉格朗日中值定理
- 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- 如果题设中给出 $A\leqslant f'(x)\leqslant B$, 则可得 $A\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant B$.
- 如果题设中给出 $f'(x)$ 单调且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 则可得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 位于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间.

- **例** 证明 $\frac{1}{1+n} < \ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}$.
- **证明** 设 $f(x) = \ln x$. 由拉格朗日中值定理,

$$\exists \xi \in (n, n+1), \qquad f'(\xi) = \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \ln(1+n) - \ln n\,.$$

- 由于 $\frac{1}{1+n} < f'(\xi) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$, 因此

$$\frac{1}{1+n} < \ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

- 例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $f'(x)$ 单调递减, $f(0)=0$. 证明当 $x\in(0,1)$ 时, $f(1)x<f(x)<f'(0)x$.
- 证明 由拉格朗日中值定理,

$$\exists\xi\in(0,x),\qquad f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x},$$

$$\exists\eta\in(x,1),\qquad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}.$$

- 由于 $f'(x)$ 单调递减, 因此 $f'(\eta)<f'(\xi)<f'(0)$. 所以

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}<\frac{f(x)}{x}<f'(0),$$

- 化简可得 $f(1)x<f(x)<f'(0)x$.

- 利用柯西中值定理
- 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导且 $g'(x) \neq 0$, 则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. 因此我们可以通过 $f'(x), g'(x)$ 或 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的单调性来建立相应的不等式.
- 例 设 $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, 证明, $e^b - e^a > (\sin b - \sin a)e^a$.
- 证明 对 $f(x) = e^x, g(x) = \sin x$ 在区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理,

$$\exists \xi \in (a,b), \qquad \frac{e^b - e^a}{\sin b - \sin a} = \frac{e^\xi}{\cos \xi} > e^\xi > e^a,$$

- 即 $e^b - e^a > (\sin b - \sin a)e^a$.

- 利用泰勒中值定理

- 例 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)>0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 证明 $f(x)\geqslant x$.

- 证明 由于 $f(x)$ 二阶可导且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 因此

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,\qquad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1.$$

- 由 $f(x)$ 的一阶麦克劳林公式, 存在 ξ 介于 0 和 x 之间使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

- 由于 $f''(x)>0$, 所以 $f(x)\geqslant x$.

- 例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=f(1)$, 且 $|f''(x)| \leqslant 2$, 证明 $|f'(x)| \leqslant 1$.
- 证明 由 $f(t)$ 在 x 处一阶泰勒公式, $\exists \xi$ 介于 x 和 t 之间使得

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2.$$

- 分别令 $t=0,1$, $\exists \xi_1 \in (0,x), \xi_2 \in (x,1)$ 使得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(-x)^2,$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2.$$

- 两式相减得到

$$f'(x)=\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2.$$

- 所以

$$|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f''(\xi)}{2}x^2\right|+\left|\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2\right|$$
$$\leqslant x^2+(1-x)^2\leqslant[x+(1-x)]^2=1.$$

- **利用凹凸性证明不等式**

- 我们可以通过对函数导数的研究得到函数图像的凹凸性，之后便可用凹(或凸)曲线 $y=f(x)$ 的如下性质:

- (1) 当 $x_1 \neq x_2$ 时，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < (\text{或} >) \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

- (2) 任意一段弦都落在曲线 $y=f(x)$ 上方 (或下方)，即 $x_1 \neq x_2$ 时，

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] < (\text{或} >) \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \qquad \lambda \in (0,1).$$

- (3) 曲线 $y=f(x)$ 上每点的切线都在曲线的下方 (或上方)，即 $x \neq x_0$ 时，

$$f(x)-f(x_0) > (\text{或} <) f'(x_0)(x-x_0).$$

- 例 证明当 $x, y > 0, x \neq y, n > 1$ 时, $\frac{x^n+y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$.
- 分析 我们只需证明曲线 $s = t^n$ 是凹的即可.
- 证明 设 $f(t) = t^n$.
- 当 $t > 0$ 时, $f''(t) = n(n-1)t^{n-2} > 0$.
- 所以曲线 $s = f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凹的.
- 故 $\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, 即 $\frac{x^n+y^n}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$.

- 例 证明当 $a, b \in [0, \pi], a \neq b$ 时，$\sin\frac{a+2b}{3} > \frac{\sin a + 2\sin b}{3}$.
- 证明 设 $f(x) = \sin x$.
- 当 $x \in (0, \pi)$ 时，$f''(x) = -\sin x < 0$.
- 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上是凸的.
- 故 $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) > \frac{f(a)+2f(b)}{3}$，即 $\sin\frac{a+2b}{3} > \frac{\sin a + 2\sin b}{3}$.

- 例 证明 $e^x > x + 1$.
- 证明 设 $f(x) = e^x$, 则 $f'(0) = e^0 = 1$, 因此 $(0,1)$ 处曲线 $y = f(x)$ 的切线为 $y = x + 1$.
- 因为 $f''(x) = e^x > 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 是凹的.
- 故 $y = x + 1$ 在它的下方, 即

$$f(x) = e^x > x + 1.$$

- 另证 由 e^x 的麦克劳林公式, $\exists \xi$ 位于 0 和 x 之间使得

$$e^x = 1 + x + \frac{e^\xi}{2}x^2 \geq x + 1.$$

- 例 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $f'(x)$ 单调递减, $f(0)=0$. 证明当 $x\in(0,1)$ 时, $f(1)x<f(x)<f'(0)x$.
- 证明 由于 $f'(x)$ 单调递减, 因此曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是凸的.
- 由于连接 $(0,0)$ 和 $\big(1,f(1)\big)$ 的弦为 $y=f(1)x$, 因此 $f(x)>f(1)x$.
- 由于在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=f'(0)x$, 因此 $f(x)<f'(0)x$.

- **利用最值证明不等式**
- 例 设 $f(x)=x^p+(1-x)^p, x\in[0,1]$, 其中 $p>1$. 证明 $2^{1-p}\leqslant f(x)\leqslant 1, x\in[0,1]$.
- 证明 显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 因此有最大值和最小值.
- 我们有 $f(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$. 令 $f(x)=0$ 可得驻点 $x=\frac{1}{2}$. 由

$$f(0)=1,\qquad f(1)=1,\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{1-p}$$

- 可知最大值为 1, 最小值为 2^{1-p}, 即 $2^{1-p}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

- 另证 设 $g(x)=x^p$. 当 $x\in(0,1)$ 时, $g''(t)=p(p-1)x^{p-2}>0$. 故曲线 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹的.
- 由凹曲线的性质得

$$\frac{g(x)+g(1-x)}{2}\geqslant g\left(\frac{x+1-x}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^p},$$

- 即 $f(x)\geqslant 2^{1-p}$.
- 容易知道, $f(x)=x^p+(1-x)^p\leqslant x+(1-x)=1$.

- 例 证明当 $x>0$ 时，$\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 1$.

- 证明 令 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

- 令 $f'(x)=0$ 可得驻点 $x=1$.
- 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.
- 当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

- 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$，即 $\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 1$.

- **例** 证明当 $-1 < x < 1$ 时，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x \geqslant 1+\frac{x^2}{2}$.

- **证明** 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}-\sin x-x-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1},$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\cos x-1+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{4}{(x^2-1)^2}-\cos x-1.$$

- 当 $x\in(-1,1)$ 时，$\frac{4}{(x^2-1)^2}\geqslant 4$ 而 $\cos x+1\leqslant 2$，因此 $f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增.

- 当 $x \in (-1,0)$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$, $f(x) > f(0) = 0$.
- 当 $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$, $f(x) > f(0) = 0$.
- 故当 $x \in (-1,1)$ 时, $f(x) \geqslant f(0) = 0$, 即 $x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$.
- 另证 设 $f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 则

$$f(-x) = -x\ln\frac{1-x}{1+x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} = f(x).$$

- 因此 $f(x)$ 是偶函数, 所以只需对 $x \in [0,1)$ 证明 $f(x) \geqslant 0$ 即可.
- 而 $f'(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{x(1+x^2)}{1-x^2} - \sin x \geqslant x - \sin x \geqslant 0$, 因此 $f(x) \geqslant f(0) = 0$.

- 另证 由于 $f''(x) > 0$, 因此曲线 $y = f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是凹的.
- 由于 $f(0) = f'(0) = 0$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y = 0$.
- 由凹曲线的性质可知, $f(x) \geqslant 0$.

- **组合恒等式**
- 利用导数可以证明一些组合恒等式.
- 例 设 n 是正整数, 证明

  (1) $\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k = n2^{n-1}$; (2) $\sum_{k=1}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k = n(n+1)2^{n-2}$.
- 证明 (1) 设 $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$, 则

$$f'(x) = n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1}.$$

- 令 $x = 1$, 得 $\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k = n2^{n-1}$.

- (2) 设 $g(x) = f'(x) + f''(x)$, 其中

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k,$$

- 则我们有

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left[k x^{k-1} + k(k-1)x^{k-2}\right].$$

- 令 $x = 1$, 得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \mathrm{C}_n^k = n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}.$$